MAT2 – A&D 8. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

22.3.2010

Regler for matrix addition og multiplikation med skalar

A, B, C matricer af samme størrelse; $r, s \in \mathbf{R}$.

1. (kommutativ) $A + B = B + A$
2. (associativ) $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. (neutralt element) $A + 0 = 0 + A = A$
4. (distributiv) $r(A + B) = rA + rB$
5. (distributiv) $(r + s)A = rA + sA$
6. (associativ) $(rs)A = r(sA)$

Regler for matrix multiplikation

A, B, C matricer, således at produkterne er definerede; $r \in \mathbf{R}$.

1. (associativ) $A(BC) = (AB)C$
2. (venstre distributiv) $A(B + C) = AB + AC$
3. (højre distributiv) $(B + C)A = BA + CA$
4. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$.
5. (neutralt element) $IA = AI = A$.
   I er enhedsmatricen med 1-taller på og 0-taller udenfor diagonalen.
6. (ikke kommutativ) $AB \neq BA$ (som regel)

Regler for transposition

A, B matricer af passende størrelse, $r \in \mathbf{R}$.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(rA)^T = rA^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Den inverse matrix
Definition

En $(n \times n)$-matrix A kaldes invertibel hvis og kun hvis der findes en $(n \times n)$-matrix C således at

$$CA = AC = I \leftarrow \text{ enhedsmatrix.}$$

og ellers singulær.
I så fald er C entydig bestemt; hvis C, D er inverse til A, så:

$$C = CI = C(AD) = (CA)D = ID = D.$$

Man skriver A^{-1} for den inverse matrix til A.

Den inverse matrix

En formel for (2×2)-matricer

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ er}$$

invertibel hvis $\det A = ad - bc \neq 0$ og

singulær hvis $\det A = 0$.

Hvis $\det A \neq 0$, så gælder:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Den inverse matrix
Den tilsvarende lineære afbildning

Betragt den tilsvarende lineære (matrix-)afbildning
$T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
T har en invers afbildning $S: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (den modsatte vej) med
$(ST)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ og $(TS)(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$
hvis og kun hvis A er invertibel.
I så fald: $S(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.
Ensbetydende betingelser:

- T er bijektiv, dvs. både injektiv og surjektiv.
- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning $A^{-1}\mathbf{b}$ for alle $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$.
- Alle As søjler (alle As rækker) har Pivotposition.
- A er rækkeækvivalent til enhedsmatricen I.

Der findes altså mange andre singulære matricer end 0-matricen! – alle dem der ikke har Pivotposition i hver søjle/række!

Regler for inverse matricer

A, B kvadratiske invertible matricer af samme størrelse.

1. A^{-1} er invertibel og $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. AB er invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. A^T er invertibel og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.