MAT2 – A&D 9. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

29.3.2010

Beregning af invers matrix

En opskrift - for matricer af moderat størrelse

1. Givet en $n \times n$-matrix A. Opstil den udvidede $n \times 2n$-matrix
$$[A|I_n]$$
med en enhedsmatrix I_n på højresiden.
2. Rækkeoperationer: Overfør denne udvidede matrix til reduceret echelonform $[H|C]$.
3. Hvis $H = I_n$ – Pivoter i hver søjle – så er A invertibel og $C = A^{-1}$.
4. Hvis $H \neq I_n$, så er A ikke invertibel.

Elementære matricer

En rækkeoperation på en $m \times n$-matrix A kan blive realiseret ved multiplikation EA med en elementær matrix E.
En elementær matrix er "næsten" en enhedsmatrix bortset fra

- Rækkeombytning (i-te og j-te række): 0 på diagonalen ved $_{ii}$ og $_{jj}$, 1 ved $_{ij}$ og $_{ji}$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Rækkemultiplikation ($r \times i$-te række): r i stedet for 1 ved $_{ii}$: $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Rækkeaddition ($r \times i$-te række lægges til j-te række): r i stedet for 0 ved $_{ji}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix}$

En elementær matrix er invertibel. Dens inverse matrix er den elementære matrix som svarer til den omvendte rækkeoperation.

Hvornår er en kvadratisk matrix A invertibel?

Flere ækvivalente kriterier

- A er rækkeækvivalent til enhedsmatricen I_n.
- A har n Pivot positioner (og dermed en i hver række, en i hver søjle).
- $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ injektiv ($A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$).
- As søjler er lineært uafhængige.
- $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ surjektiv ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning for alle $\mathbf{b}$).
- As søjler udspænder $\mathbf{R}^n$.
- A kan skrives som produkt af elementære matricer.