MAT2 – A&D 12. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

26.4.2010

Basissætningen

Anvendelse: Invertibilitet

Dimension dim H af et underrum H: antal elementer i en basis for H.

Theorem

Givet et underrum $H \leq \mathbf{R}^n$ af dimension p.
Følgende er automatisk baser for H:

- *en lineær uafhængig delmængde $B \subset H$ med p elementer;*
- *en delmængde $B \subset H$ med p elementer som udspænder H.*

Theorem

En $n \times n$-matrix A er invertibel (= regulær) hvis og kun hvis

- $Col\ A = \mathbf{R}^n \Leftrightarrow\ rang\ A = n$;
- $Nul\ A = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim\ Nul\ A = 0$.

Determinanter
Definition

- $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$
  $a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} =$
  $a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$
  $+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$
- $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$ $\leftarrow$ rekursiv definition
  udvikling efter 1. række.

A_{ij} undermatrix med i-te række og j-te søjle slettet.

Determinanter

Opløsning efter en række eller søjle i matricen A

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$: komplement[1] til a_{ij}

Opløsning efter i-te række:

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in};$$

Opløsning efter j-te søjle:

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

Alle opløsninger giver samme resultat.
Fortegnene $(-1)^{i+j}$: skakbrætmønster!
Opløsning anvendes igen på de nye $(n-1) \times (n-1)$ matricer – med nyt skakbrætmønster!

[1] eng.: cofactor

Rækkeoperationer og determinanter
Hvordan ændrer en rækkeoperation matricens determinant?

Rækkemultiplikation Række ganges med $k \rightsquigarrow$ determinanten ganges med k;

Rækkeombytning Determinanten skifter fortegn;

Rækkeaddition Determinanten uændret.

Theorem

Overføres $n \times n$-matricen A til echelonform U uden brug af rækkemultiplikationer og med r rækkeombytninger, så gælder:

$$\det A = \begin{cases} (-1)^r \cdot (\text{ produkt af Pivoterne }) & A \text{ invertibel} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Theorem

A invertibel $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
A singulær $\Leftrightarrow \det A = 0$.