MAT2 – A&D 13. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

3.5.2010

Determinanter

Vigtige egenskaber for determinanter af $n \times n$-matricer

- Hvis matricen A har to éns rækker: $\det A = 0$.
- $\det rA = r^n \det A$.
- $\det A^T = \det A$.
- $\det AB = (\det A)(\det B)$.
- Hvis B fås fra A ved at gange én række (hhv. én søjle) med $c \in \mathbf{R}$ (resten uændret!), så gælder: $\det B = c \det A$.
- Givet tre matricer A, B, C som stemmer overens undtagen i j-te række/søjle, og således at $\mathbf{c}_j = \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j$. Så gælder: $\det C = \det A + \det B$.

Egenvektorer og egenværdier

Definition

Mål: Forståelse af afbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ fra $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ for en $n \times n$-matrix A.

Definition

- En egenvektor for A er en vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ således at $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ for et reelt tal λ.
  Dette tal λ kaldes egenværdi hørende til $\mathbf{x}$.
- Givet en egenværdi $\lambda \in \mathbf{R}$. Mængden af alle vektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ med $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ danner et underrum $E_\lambda \leq \mathbf{R}^n$, egenrummet hørende til λ. Det indeholder, udover alle egenvektorer til egenværdien λ, også nulvektoren $\mathbf{0}$.

For en given egenværdi $\lambda \in \mathbf{R}$ stemmer egenrummet E_λ overens med nulrummet $Nul(A - \lambda I)$ for matricen $A - \lambda I$:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Beregning af egenværdier

Det karakteristiske polynomium

For hvilke reelle tal $\lambda \in \mathbf{R}$ har ligningen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ en ikke-triviel løsning $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}$? $\Leftrightarrow$ For hvilke reelle tal $\lambda \in \mathbf{R}$ har ligningen $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en ikke-triviel løsning $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}$?

Ækvivalente betingelser:

- $A - \lambda I$ er singulær (dvs. ikke invertibel)
- $\det(A - \lambda I) = 0$.

Definition

- For en $n \times n$ matrix A kaldes polynomiet (grad = n) $p_\lambda(A) = \det(A - \lambda I)$ matricens karakteristiske polynomium. De reelle rødder λ i det karakteristiske polynomium svarer til matricens egenværdier.
- Givet en egenværdi λ_0. Dens algebraiske multiplicitet svarer til multipliciteten af denne rod i $p_\lambda(A)$, dvs. den højeste potens r således at $(\lambda - \lambda_0)^r$ går op i $p_\lambda(A)$.