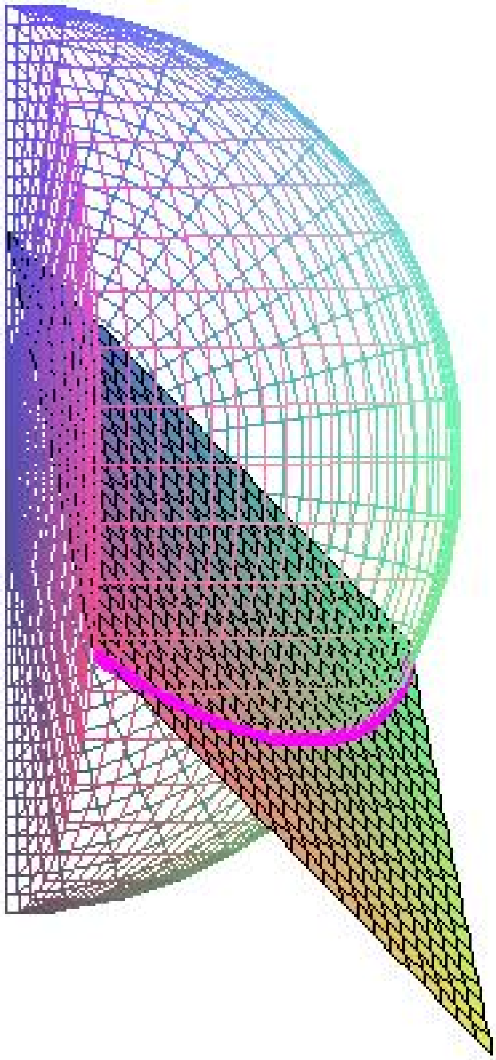
I miniprojektet arbejder vi med de bygninger som Sidneys operahus, tegnet af Jørn Utzon, er sammensat af.

Halvdelen af hver skal er skåret ud af en kugle med en given radius R; centrum lægger vi for nemhedens skyld i Origo.

En skalhalvdel D udskæres af denne kugle ved hjælp af tre planer: XZ-planen, YZ-planen og en skråplan α som antages at være givet ved ligningen $x + y + z = S$ med $0 < S < R$; den går gennem punktet $P_0 : (0, 0, S)$ på Z-aksen. Se Figur 1 på side 2.

1. Hvor lang er buestykket B (i magenta på Figur 1) som afgrænser skallen?
   (a) Gør rede for at fællesmængden mellem kugle og planen α er en cirkel med centrum i punktet $C : (\frac{S}{3}, \frac{S}{3}, \frac{S}{3})$. Bestem cirklens radius r.[1]
   (b) Buen B afgrænses af et punkt P_1 i XZ-planen og et punkt P_2 i YZ-planen. Beskriv principperne i bestemmelsen af disse punkters koordinater og af vinklen α mellem vektorerne $\mathbf{C}P_1$ og $\mathbf{C}P_2$. Benyt dette til bestemmelse af buelængden.
2. Beskriv både kuglen med radius R og skråplanen α i *sfæriske* koordinater og bestem en ligning i de ubekendte vinkler φ, θ som gælder for koordinaterne for et punkt (x, y, z) på buestykket B.
3. Skallen støbes af betonelementer som løber langs med (storcirkel) meridianer fra polen $(0, 0, R)$ til det afgrænsende buestykke som vi har behandlet under 1. Hvor lang er buestykket M_θ – fra polen til grænsecirklen – svarende til længdekoordinaten θ, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$?
   (a) For en given vinkel θ sættes $t = \cos\theta + \sin\theta, s = \sin\varphi$. Løs den ligning som blev fundet i 2. med hensyn til s.[2]
   (b) Bestem længden af M_θ og plot den – for $R = 2, S = 1$ – som en funktion af $\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Man skal tage hensyn til at $\varphi > \frac{\pi}{2}$ i dette tilfælde!
4. Modeller skaldelen D ved hjælp af Grasshopper og Rhino. Man skal kunne skalere både R og S (`slider`!)

[1] Bestem afstanden fra et punkt (x, y, z) i fællesmængden til C.
[2] Grundformlen $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ hjælper.
Benyt desuden $t^2 = 1 + \sin(2\theta)$ for at få følgende facit:
$s = \frac{S\sqrt{1+\sin(2\theta)} + \sqrt{R^2(2+\sin(2\theta)) - S^2}}{R(2+\sin(2\theta))}$.



Figur 1: Skal og randcirkelstykke