Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 3.
Hermitekurver og Bézierkurver af orden 3 beskriver 3. ordens kurver.

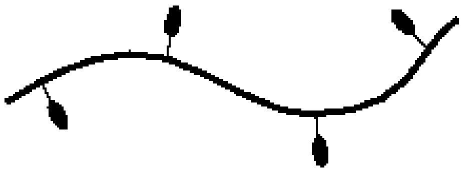
Forelæsningens 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Bézierkurver kan konstrueres ved hjælp af de Casteljau's algoritme, som leder i få trin fra kontrolpunkterne til kurven. Se appletten nedenfor.

Når man vil finde en rimelig glat kurve, der går igennem et antal punkter i plan eller rum, bruger man tit en kubisk spline som løsning. Den er sammensat af kubiske kurver mellem to på hinanden følgende punkter, og således, at krumningen bliver en kontinuert funktion. Navnet spline (trækstok?) kommer fra et tegneinstrument som blev brugt især i forbindelse med skibsgyggeri.



Kubiske splines har grad 3 – nemt at arbejde med for en computer – og har som følge kontinuerte accelerationsvektor og krumninger. Dette er tilstrækkelig for mange formål, men ikke når turbulensfænomener stiller større krav. I så fald skal man op til grad 5.

En anden ulempe ved kubiske splines: Man har ingen lokal kontrol. En ændring af bare et styrepunkt laver om på hele kurvens forløb.

Litteratur:

Architectural Geometry Pottmann, Asperl, Hofer, Kilian, *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, 2007, 259 – 269.

Wikipedia De Casteljau's algorithm

Wikipedia Splines

Applet:

- Casteljau's algoritme

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

Kurvers krumning E& P, 11.6, pp. 877 – 879: 33, 55.

Bézierkurver En Bézierkurve af grad 3 med kontrolpunkter Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(t) = B_{03}(t)Q_0 + B_{13}(t)Q_1 + B_{23}(t)Q_2 + B_{33}(t)Q_3$, hvor B_{i3} er et Bernsteinpolynomium af grad 3:

$$\begin{aligned} B_{03}(t) &= -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 \\ B_{13}(t) &= 3t - 6t^2 + 3t^3 \\ B_{23}(t) &= -3t^3 + 3t^2 \\ B_{33}(t) &= t^3 \end{aligned}$$

1. Bestem Bernsteinpolynomiernes 1. og 2. afledede i $t = 0$ og i $t = 1$.
2. Gør rede for at
   - $\mathbf{r}'(0) = 3\overrightarrow{Q_0Q_1}$
   - $\mathbf{r}'(1) = 3\overrightarrow{Q_2Q_3}$
   - $\mathbf{r}''(0) = 6(\overrightarrow{Q_1Q_0} + \overrightarrow{Q_1Q_2}$

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8855
-
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN

- $\mathbf{r}''(1) = 6(\overrightarrow{Q_2Q_1} + \overrightarrow{Q_2Q_3}$

3. Man kan udnytte dette til at vise[1] at krumningen i endepunkterne af Bézierkurven er givet ved

$$\kappa(0) = \frac{2}{3}\frac{[\overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_1Q_2}]}{|\overrightarrow{Q_0Q_1}|^3},$$

$$\kappa(1) = \frac{2}{3}\frac{[\overrightarrow{Q_2Q_3}, \overrightarrow{Q_2Q_1}]}{|\overrightarrow{Q_2Q_3}|^3}.$$

Her står $[,]$ for determinanten med de to vektorer som søjlevektorer. Bemærk at formlen i begge tilfælde kun bruger tre af de fire kontrolpunkter.

Forelæsningens 2. del:

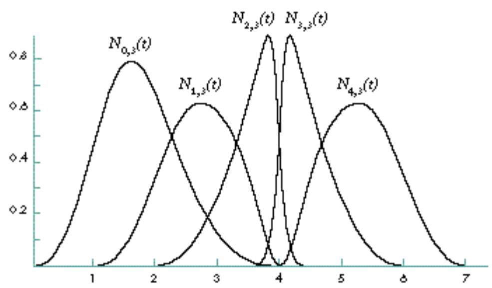
kl. 11:25 – 12 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

I dag bruger de fleste tegneprogrammer såkaldte NURBS (Non-uniform rational B-splines), som tillader en meget større grad af fleksibilitet i tegning af kurver. Desuden kan vigtige kurver som fx. ellipser beskrives som NURBS. Grundideen er at kurvens form styres og manipuleres af et antal kontrolpunkter, men kurven vil som oftest kun gå igennem få af dem – de andre påhvirker kurvens form. I første omgang forsøger man at sammensætte kurven af Bézierkurver af en given grad (oftest 2, 3 eller 5).

Der er mange parametre at holde styr på: kontrolpunkter (som kurven kan, men ikke skal gå igennem), grad (degree), knot vektor og vægt. Grundideen er, at styrken med hvilken et kontrolpunkt påvirker kurvens udseende reguleres af en basis(B-)funktion (eller influensfunktion). Denne funktion er på dele af definitionsintervallet et polynomium af en given grad d; den er konstant 0 (uden indflydelse) på resten af intervallet. Det er knot vektoren der styrer, på hvilke dele af definitionsintervallet en basisfunktion har indflydelse. Og graden af polynomierne afgør hvilken grad af kontinuitet kurven opnår.

Man får en første ide om variationsmuligheder ved at lege med nedenstående applet.



Litteratur:

Architectural Geometry Pottmann, Asperl, Hofer, Kilian, *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, 2007, 269 – 279.

Wikipedia NURBS

Rhino NURBS og Rhino

Unitiated NURB Curves for the Uninitiated

Applet:

- NURBS

Næste gang:

Torsdag, 3.3., kl. 8:15–12:30.
Mere om NURBS.

[1] Her skal lærer/hjælpelærer assistere!

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8855
-

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN