Kurver og flader i geometri, arkitektur og design 15. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

22. marts 2011

Lineær approksimatrion

En lineær funktion $z = A(x-a) + B(y-b) + C$ beskriver en plan gennem $P : (a, b, C)$.
Hvilket punkt i planen ligger over $(a + \Delta x, b + \Delta y)$?
$z = A(a + \Delta x - a) + B(b + \Delta y - b) + C) =$
$(A\Delta x + B\Delta y) + C = dz + C$.
z vokser med dz når x vokser med Δx og y vokser med Δy.
Funktionen $z = f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + f(a, b)$ beskriver tangentplanen til grafen for f i $P : (a, b, f(a, b))$.
Dermed ligger punktet $(a + \Delta x, b + \Delta y, f(a, b) + dz)$ over $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ med $dz = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y$.
z vokser på tangentplanen med dz når x vokser med Δx og y vokser med Δy.

Differentiabilitet

Er den approksimerede værdi $z = f(a,b) + dz$ tæt nok på den rigtige værdi $z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a,b) + \Delta f$ – med $\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$?
Ja, hvis differensen $f(a+\Delta x, b+\Delta y) - (f(a,b) + dz)$ er meget mindre end længden af vektoren $(\Delta x, \Delta y)$.

Definition

Funktionen f er differentiabel i punktet (a,b) (i det indre af definitionsområdet), hvis

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) - (f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Kriterier for differentiabilitet

Theorem

1. *Hvis f har kontinuerte partielle afledede så er f differentiabel.*
2. *Hvis f er differentiabel så eksisterer de partielle afledede.*
3. *Hvis f er differentiabel så er f kontinuert.*

De omvendte påstande er forkerte.