Kurver og flader i geometri, arkitektur og design 23. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

9.5.2011

Normal- og hovedkrumninger i et fladepunkt

Normalkrumningen $k = k_n(a, b)$ i tangentretningen $\mathbf{t} = a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v$ beregnes som

$$k = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}. \qquad (1)$$

Hvilke værdier kan k antage for varierende tangentretninger $\mathbf{t}$?

(1) $\Leftrightarrow$

$((kE - e)a + (kF - f)b)^2 + ((kG - g)(kE - e)$

$-(kF - f)^2)b^2 = 0$ har løsning $k \Leftrightarrow$

$(kG - g)(kE - e) - (kF - f)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

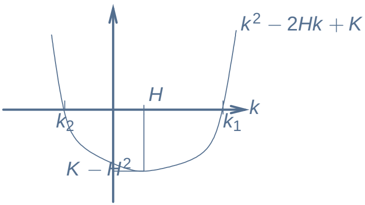
$$k^2 - \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}k + \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \leq 0$$

$$k^2 - 2Hk + K \leq 0$$

Gauss - og middelkrumning

Gauss: $K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$

middel: $H = \dfrac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}$



Hovedkrumninger k_1, k_2 = største/mindste normal-krumning = rødder i polynomiet

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

Bemærk:

$$K = k_1 k_2 \qquad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Klassifikation af punkter

Et punkt P på en flade S kaldes

elliptisk hvis $K(P) > 0$.
$k_1(P), k_2(P)$ har samme fortegn; alle normalsnit krummer i sammen retning af normalen; $T_P(S)$ ligger på én side af fladen tæt på S.

hyperbolsk hvis $K(P) < 0$.
$k_1(P), k_2(P)$ har forskelligt fortegn; der findes en (asymptotisk) retning med normalkrumning 0; $T_P(S)$ skærer fladen i en kurve tæt på S.

parabolsk hvis $K(P) = 0$ og ikke både $k_1(P) = k_2(P) = 0$.
Normalkrumninger mellem 0 og en maksimal (eller minimal) hovedkrumning. Alle normalsnit (undtagen evt. en) på samme side af tangentplan $T_P(S)$.

planpunkt hvis $K(P) = k_1(P) = k_2(P) = 0$. Alle normalkrumninger er 0. Fladen krummer næsten ikke i P.

Hovedretninger og Eulers formel

Hovedretninger:

$\mathbf{t}_i = a_i\mathbf{r}_u + b_i\mathbf{r}_v$, i=1,2.

Løs en af ligningerne

- $(k_iE - e)a_i + (k_iF - f)b_i = 0$
- $(k_iF - f)a_i + (k_iG - g)b_i = 0$

for de beregnede hoved-krumniger k_1, k_2

Der er en hel "linie" bestå-ende af løsninger!

En løsning $[a_i, b_i]$ indsættes i $\mathbf{t}_i = a_i\mathbf{r}_u + b_i\mathbf{r}_v$.

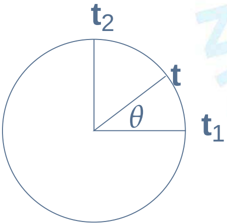
Eulers formel:

beregner alle normalkrum-ninger ud fra hovedkrumnin-gerne k_1, k_2.

Hovedretninger: $\mathbf{t}_1 \perp \mathbf{t}_2$.

For tangentvektor $\mathbf{t}_\theta$ med vinkel θ fra $\mathbf{t}_1$ til $\mathbf{t}_\theta$:

$$k_n(\mathbf{t}_\theta) = (\cos\theta)^2 k_1 + (\sin\theta)^2 k_2.$$



$z = f(x,y) \rightsquigarrow$ parameterfremstilling $\mathbf{r}(u,v) = [u, v, f(u,v)]$.

$\mathbf{r}_u(u,v) = [1, 0, f_u(u,v)]$, $\mathbf{r}_v(u,v) = [0, 1, f_v(u,v)]$,

$E(u,v) = 1 + (f_u(u,v))^2$; $F(u,v) = f_u(u,v)f_v(u,v)$;

$G(u,v) = 1 + (f_v(u,v))^2$.

Normalvektor $\nu(u,v) = \frac{[-f_u(u,v), -f_v(u,v), 1]}{\sqrt{1+(f_u(u,v))^2+(f_v(u,v))^2}}$,

$\mathbf{r}_{uu}(u,v) = [0, 0, f_{uu}(u,v)]$; $\mathbf{r}_{uv}(u,v) = [0, 0, f_{uv}(u,v)]$;

$\mathbf{r}_{vv}(u,v) = [0, 0, f_{vv}(u,v)]$;

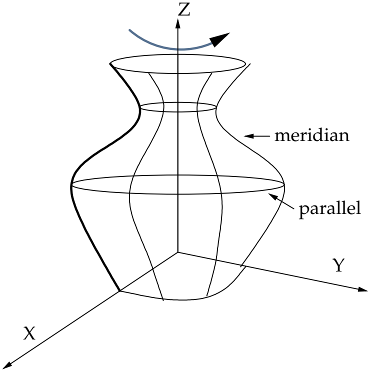
$e(u,v) = \frac{f_{uu}(u,v)}{\sqrt{1+(f_u(u,v))^2+(f_v(u,v))^2}}$;

$f(u,v) = \frac{f_{uv}(u,v)}{\sqrt{-}}$; $g(u,v) = \frac{f_{vv}(u,v)}{\sqrt{-}}$.

Gausskrumning $K(u,v) = \frac{(f_{uu}f_{vv} - (f_{uv})^2)(u,v)}{(1+f_u^2+f_v^2)^2(u,v)}$;

Middelkrumning $H(u,v) = \frac{((1+f_u^2)f_{vv} - 2f_uf_vf_{uv} + (1+f_v^2)f_{uu})(u,v)}{2(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{3}{2}}(u,v)}$.

Frembringerkurve med parameter-fremstilling $\mathbf{x}(v) = [x(v), 0, z(v)],\ x(v) > 0$ drejes om Z-aksen.



Omdrejningsflade med parameterfremstilling $\mathbf{r}(u, v) = [x(v)\cos u, x(v)\sin u, z(v)]$

Parameterkurver:

Parallelcirkler – vandret

Meridianer – frembringer roteret

I. $E(u,v) = x(v)^2, F(u,v) = 0, G(u,v) = x'(v)^2 + z'(v)^2$.
Meridian $\perp$ parallelcirkel
II. $e(u,v) = \frac{-xz'}{\sqrt{x'(v)^2+z'(v)^2}}, f(u,v) = 0$,
$g(u,v) = \frac{x''(v)z'(v)-x'(v)z''(v)}{\sqrt{x'(v)^2+z'(v)^2}}$.
$f = F = 0 \Rightarrow$
hovedkrumningsretninger = parameterkurvernes tangentretninger.
$\{k_1, k_2\} = \{\frac{e}{E}, \frac{g}{G}\} = \{-\frac{z'}{x\sqrt{x'^2+z'^2}}, \frac{x''z'-x'z''}{\sqrt{x'^2+z'^2}^3}\}$
$K = \frac{eg}{EG}, H = \frac{eG+gE}{2EG}$.
Hvis frembringerkurven er parametriseret ved buelængde:
$K = \frac{-x''}{x},\ \{k_1, k_2\} = \{\frac{-z'}{x}, \frac{x''}{z'}\}$.
Fortegnet for x'' afgør om punktet er hyperbolsk, elliptisk, parabolsk.

Retlinede flader (ruled surfaces)
specielt tilfælde 3

sammensat af rette linier, kan alligevel være krumme.
Parameterfremstilling: $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{p}(u) + v\mathbf{q}(u),\ u,v \in \mathbf{R}$
$\mathbf{p}(u)$: centralkurve
$\mathbf{q}(u)$: retningsvektor for linie gennem P_u med $\overrightarrow{OP_u} = \mathbf{p}(u)$.
Eksempler:

- Kegleflade $\mathbf{p}(u)$ konstant
- Cylinderflade $\mathbf{q}(u)$ konstant
- Tangentflade (til kurve) $\mathbf{q}(u) = \mathbf{p}'(u)$
- Hyperbolsk paraboloide $\mathbf{p}(u) = [u,0,0], \mathbf{q}(u) = [0,1,cu]$

Gausskrumning $K(P) \leq 0$ i alle punkter P.
Hvorfor? Langs linie gennem P er normalkrumningen 0.
Eulers formel: k_1, k_2 kan ikke have samme fortegn:
$K = k_1 k_2 \leq 0$.
Udfoldelige flader: $K = 0$, kan bukkes ud af plane områder.