Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 2.

Forelæsningens 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 2.

Opgaveregning:

kl. 13:45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 2.

Næste gang:

Mandag, 12. september.
Lineær afhængighed og uafhængighed
SIF, 1.6 – 1.7.

Mål og indhold:

Repetition:

Matricer, vektorer, linearkombinationer, matrix-vektor produkt.

Nyt stof:

Hvad kan matricer og vektorer bruges til? Rigtig mange ting og sager, den første helt væsentlige anvendelse introduceres nu:

Lineære ligningssystemer: Mange spørgsmål i ingeniørvidenskaberne, naturvidenskaberne, økonomi mv. fører i sidste ende til lineære ligningssystemer, et antal lineære ligninger i et antal variable. I kender til metoder til at løse to lineære ligninger i to variable fra gymnasiet.

Vi beskæftiger os med metoder til at *løse* systemer af m lineære ligninger i n variable – hvor m, n er vilkårlige positive heltal. Som det første spørger man om et sådant ligningssystem i det hele taget har en løsning (om det er konsistent); og hvis ja, om det har én eller flere løsninger – og hvordan man kan beskrive løsningerne på en simpel form.

Et lineært ligningssystem er fuldstændigt beskrevet ved dets koefficienter; dem pakker man gerne ind i en matrix A. Ved løsning af et lineært ligningssystem kombineres koefficientmatricen[1] og højresiden $\mathbf{b}$ i systemets totalmatrix[2] $[A| \ \mathbf{b}]$. Målet er at bestemme løsningsmængden til ligningssystemet.

Rækkeoperationer: For at løse et lineært ligningssystem gennemfører man et antal rækkeoperationer på den tilsvarende totalmatrix $[A| \ \mathbf{b}]$. Den oprindelige matrix og den man får efter at have gennemført en eller flere rækkeoperationer kaldes rækkeækvivalente. Det er væsentligt at indse, at rækkeoperationerne bevarer løsningsmængden, dvs. at ligningssystemer svarende til rækkeækvivalente matricer har den samme løsningsmængde.

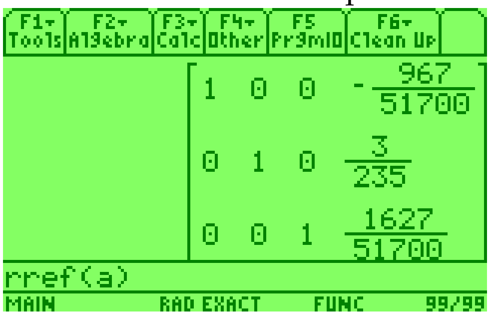
Nu gælder det om at overføre en ma-

[1] eng.: coefficient matrix
[2] eng.: augmented matrix
[3] eng.: echelon form

trix til en anden simplere matrix på "trappeform"[3] ved hjælp af rækkeoperationer. Ligningssystemet svarende til en totalmatrix på trappeform kan nemt løses, én ligning og én variabel ad gangen, ved baglæns substitution[4].

Selve udregning overlades som regel i praksis til lommeregner eller computerprogram. Men det er vigtigt at forstå fremgangsmåden og beskrivelsen af løsningsmængden!

Rækkereduktion til række-echelonform: (et fint fransk ord for trappeform). Givet en (total)matrix $[A|\ \mathbf{b}]$. Hvordan kan man overføre den i en rækkeækvivalent simpel matrix $[H|\ \mathbf{c}]$ således at det tilsvarende ligningssystem er nem at løse? Og hvordan kan man karakterisere "simpel"?



Gauss-algoritme: Det gøres ved den såkaldte rækkereduktionsalgoritme (eller Gauss-algoritme). Ved at arbejde sig systematisk gennem søjlerne fra venstre til højre opnår man

- ved rækkeombytninger: at ledende koefficienter optræder længst muligt til venstre;
- og ved rækkeadditioner("erstatninger"): at der kun står 0-taller under en ledende koefficient i hver Pivotsøjle.

Efter et antal operationer ender man med en (rækkeækvivalent) matrix på echelonform. Søjler med Pivotpositioner (skal indeholde en ledende koefficient) kaldes Pivotsøjler; de tilsvarende variable er bundne[5]; evt. resterende variable er frie[6] variable.

Det kan som regel betale sig at fortsætte med flere rækkeoperationer for at nå frem til en matrix på reduceret echelonform (som iøvrigt er entydigt bestemt ud fra den oprindelige matrix). Det opnås med den såkaldte Gauss-Jordan algoritme. Her sørger man – ved rækkemultiplikationer – for at alle Pivotelementer normeres til 1-taller og – ved rækkeadditioner – at der kun står 0-taller også over disse Pivotpositioner.

Antallet af Pivotsøjler i echelonmatricen kaldes rangen[7] – af både echelonmatricen og af den oprindelige $m \times n$-matrix. Desuden tales om matricens defekt eller korang[8]: $rank(A) + nullity(A) = n$ = antal søjler i A. Rangen svarer til antallet af bundne variable, defekten til antallet af frie variable.

Om løsningsmængden af systemet givet ved $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved man nu:

1. Systemet har en løsning (er konsistent) hvis koefficientmatricen A og totalmatricen $[A|\ \mathbf{b}]$ har den samme rang. Det betyder nemlig, at man ved rækkereduktion aldrig kommer frem til en ledende koefficient i højresiden.
2. Hvis systemet er konsistent og hvis koefficientmatricens rang er n (maximal) og dermed defekten 0

[4] eng.: back susbstitution
[5] på engelsk: basic
[6] eng.: free
[7] eng.: rank
[8] eng.: nullity

Fredrik Bajersvej 7G — 9940 8855 — raussen@math.aau.dk
9220 Aalborg Øst — - — people.math.aau.dk/~raussen

(minimal), så har systemet netop én løsning.

3. Hvis systemet er konsistent og hvis koefficientmatricens rang er mindre end n og dermed defekten større end 0, så har systemet uendelig mange løsninger.

Litteratur:

SIF Ch. 1.3 – 1.4, pp. 27 – 50.

Komp pp. 10 – 14.

Wikipedia

MathWorld

Webdemo:

På denne webside kan man øve sig i at gennemføre rækkereduktioner på systematisk vis; man skal selv angive hvilke rækkeoperationer der skal udføres; udregningen klares automatisk!

Opgaver:

Ch. 1.2 17, 29, 33, 45 –64.

Ch. 1.3 1, 3, 5, 7, 9, 11, 23, 25.

Ch. 1.2+ 11, 19, 31.

Ch. 1.3+ 27, 55.