

## Køreplan:

### Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 4.

### Forelæsnings 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 4.

### Opgaveregning:

kl. 9:30 – 10:20 i grupperummene.

## Forelæsnings 2. del:

kl. 10:25 – 12:00 i Auditorium 4.

### Næste gang:

Torsdag, 15.9., 12:30 – 16:15.

Matrixmultiplikation.

Regulære og elementære matricer.

SIF, 2.1 og 2.3, pp. 122 – 127.

## Mål og indhold:

### Repetition:

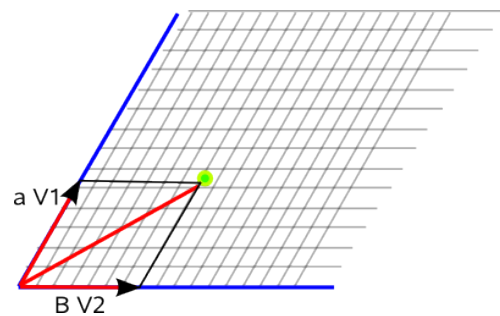
Lineære ligningssystemere. Konsistens. Bestemmelse af løsningsmængde ved række-reduktion; frie og bundne variable. SFI, ch. 1.3 – 1.4.

### Nyt stof:

**Spænd:** Mængden af alle **linearkombinationer**  $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_p\mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$  med reelle koefficienter (eller vægte) af et antal vektorer  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$  i  $\mathbf{R}^n$  kaldes vektorernes **spænd**<sup>1</sup>  $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} \subset \mathbf{R}^n$ .

Spændet har følgende **geometriske interpretation**: Spændet af én vektor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  svarer til vektorerne på en ret linie med retningsvektor  $\mathbf{v}$  gennem Origo. Spændet af to vektorer svarer typisk, men ikke altid, til en plan gennem Origo (og ikke, hvad mange fejlagtigt tror, til det område "mellem" de to vektorer; det drejer sig om en **hel plan!**)

<sup>1</sup>eng.: span



**Vektorligninger:** Er en given vektor  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$  indeholdt i spændet  $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\}$ ? Svaret findes ved at løse en **vektorligning**  $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$ , eller et ækvivalent **lineært ligningssystem** hvis totalmatrix har **søjler**  $[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_p \mid \mathbf{b}]$ . Vektoren er indeholdt i spændet hvis og kun hvis dette ligningssystem er **konsistent**.

Hvornår er spændet af  $p$  vektorer i  $\mathbf{R}^m$  lig med hele rummet  $\mathbf{R}^m$ ? For at teste dette, indsætter man vektorerne som søjlevektorer i matrixen  $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_p]$ . Hvis rangen for denne matrix opfylder  $\text{rank}(A) = m$  – en Pivotposition i hver række, så kan man løse  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  for enhver højreside  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$  – og ellers ikke!

Vi skal nu undersøge hvor mange vektorer man skal bruge for at udspænde en

plan, rummet eller evt. større "hyperrum".

1. Hvornår udspænder et antal vektorer hele  $\mathbf{R}^n$  – med alle vektorer med  $n$  koefficienter? Sæt vektorerne ind som søjler en matrix. Denne matrix skal have rang  $n$  – **Pivoter** i hver **række** (Theorem 1.6)
2. Hvornår kan man udelade den sidste vektor i en liste uden at spændet bliver mindre? Det kan man når den sidste vektor er indeholdt i spændet af de forudgående (Theorem 1.7)
3. En vektor i spændet er en linearkombination  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_k\mathbf{u}_k$ . Er koefficienterne  $c_1, \dots, c_k$  entydigt bestemt – har  $\mathbf{v}$  en entydig "adresse"?

Det sidste spørgsmål fører til definition for lineær **uafhængighed** og **afhængighed** – hvor man undersøger spørgsmål (3) for  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

En mængde vektorer  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  kaldes **lineært afhængig**, hvis vektorligningen (afhængighedsrelationen)

$$c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

har **andre** løsninger end den *trivielle* løsning  $c_1 = \dots = c_k = 0$  – og **lineært uafhængig** ellers.

En lineært afhængig mængde af vektorer har den egenskab at (mindst) en af vektorerne kan udtrykkes som linearkombination af de andre. Denne vektor kan derfor udelades, hvis man vil udtrykke spændet af vektorerne  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  så økonomisk som muligt.

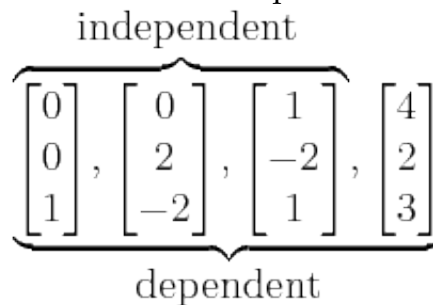
**Hvornår er op til tre vektorer lineært uafhængige?**

Én vektor  $\mathbf{v}$  er lineært **afhængig**, hvis den er lig med  $\mathbf{0}$ -vektoren - ellers er den lineær **uafhængig** og udspænder en linje.

To vektorer er lineært **afhængige** hvis de er parallelle. I så fald udspænder de højst en linje; hvis de er lineært **uafhængige**, så udspænder de en plan.

Tre vektorer i rummet udspænder hele rummet hvis og kun hvis de er lineært **uafhængige**; er de lineært **afhængige**, udspænder de højst en plan.

Generelt er et antal vektorer lineært **uafhængige**, hvis enhver vektorer i deres spænd er en **entydig** linearkombination af disse vektorer; hver vektor har kun én adresse i det "lineære postvæsen"!



**Metode:** Hvordan finder man ud af om en mængde vektorer er lineært **uafhængig**? Man indsætter vektorerne som søjler i en matrix  $A$ . Vektorerne er lineært **uafhængige** hvis **hver** søjle i denne matrix  $A$  er en **Pivotsøjle** – for så har matrixligningen  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  kun den trivielle løsning  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

En god sammenfatning om information som ligger i rangen af matricen  $A$  findes i lærebogen på side 83.

**Litteratur:**

**SIF** ch. 1.6 – 1.7.

**Komp** pp. 4, 11 – 14.

**Wikipedia** Linear span

**Wikipedia** Linear independence

**Opgaver:**

**Ch. 1.6** 1, 3, 17.

**Ch. 1.3** 41, 43, 51<sup>2</sup>, 57 – 76.

**Ch. 1.4** 5, 9, 17, 37, 53 – 72.

**Ch. 1.4+** 21, 35.

---

<sup>2</sup>Opgavetekst: Se nederst i 1. søjle!