

Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 4.

Forelæsnings 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 4.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Forelæsnings 2. del:

kl. 11:25 – 12:00 i Auditorium 4.

Næste gang:

Torsdag, 24.11., 12:30 – 16:15

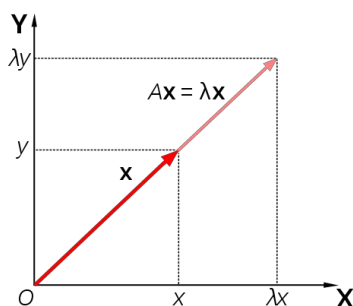
Mål og indhold:

Repetition:

Egenverdier og egenvektorer.
Karakteristisk polynomium.
Similaritet.

Nyt stof:

Det er nemt at forstå hvad en $n \times n$ matrix A (eller en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$) gør med en egenvektor $\mathbf{x}$: Den bliver sendt på en (kortere eller længere) vektor $A\mathbf{x}$ på den **samme linie**.



Derfor bliver en linearkombination af egenvektorer igen sendt på en (som regel en anden) linearkombination af de samme egenvektorer. Man har dermed fuldstændig styr på afbildningen givet ved multiplikation med matricen, **hvis** der findes en

basis bestående af egenvektorer for $\mathbf{R}^n$; eller, sagt på en anden måde, **hvis** A er **diagonaliserbar**, dvs. similær til en diagonalmatrix:

Givet en egenvektorbasis $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, så dannes matricen $P = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ med disse egenvektorer som **søjler**. Man regner efter at $A = PDP^{-1}$, hvor D er diagonalmatricen med d_{ii} lig med egenværdien hørende til $\mathbf{v}_i$.

Der findes ikke egenvektorbaser for alle matricer/lineære afbildninger. F.eks. har en drejning i planen $\mathbf{R}^2$ slet ingen egenvektorer! Men i en række tilfælde kan man være sikker på at der findes sådan en **egenvektorbasis**:

Theorem 5.3 (p. 317): En mængde af egenvektorer hørende til **forskellige** egenverdier er lineært uafhængig.

Konsekvens (p. 318): Hvis en $n \times n$ matrix A har **n forskellige** egenverdier, så findes der en egenvektorbasis for A – og dermed er A **diagonaliserbar**.

Hvordan afgør man om en matrix A er diagonaliserbar? Først skal alle rødder i det karakteristiske polynomium $\det(A -$

λI) være **reelle**. Derudover skal der til enhver egenverdi (=rod) λ for A med **algebraisk multiplicitet** k svare et egenrum E_λ med samme dimension k ! (Test, p. 324). Generelt kan denne dimension (egenverdiens **geometriske multiplicitet**) risikere at være mindre.

Litteratur:

SIF Ch. 5.3 – 5.4

Komp 32 - 34

Wikipedia Eigenvalue, eigenvector and eigenspace; Characteristic polynomial; Diagonalizable matrix

Opgaver:

Ch. 5.3 1, 3, 4, 13.

Ch. 5.1 41 – 60.

Ch. 5.2 11, 15, 19, 31, 41, 53 – 72.

Ch. 5.2+ 73, 79, 81.