Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 2.

Forelæsningens 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 2.

Opgaveregning:

kl. 13:45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 2.

Næste gang:

Mandag, 12.12., kl. 8:15 – 12:00.
Miniprojekt 5.

Eksamensforberedelse:

Mange prøveopgaver findes nederst på denne hjemmeside.

Mål og indhold:

Repetition:

Ortogonale matricer. Stive flytninger.

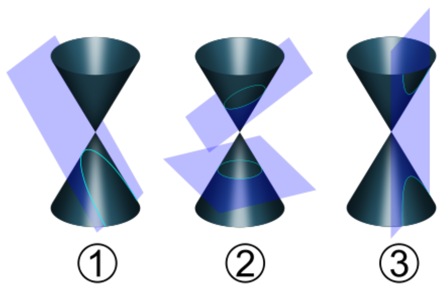
Nyt stof:

En kvadratisk $(n \times n)$-matrix A er symmetrisk hvis $A^T = A$; den går over i sig selv ved spejling i hoveddiagonalen. Symmetriske matricer har specielt gode egenskaber med hensyn til egenvektorer og diagonalisering:

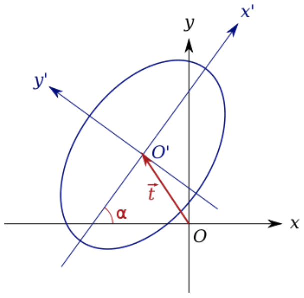
For en symmetrisk matrix er det nemt at verificere at egenvektorer svarende til forskellige egenværdier er indbyrdes ortogonale. Vælger man ortonormalbaser for hvert egenrum får man derfor en samlet ortonormalbasis – for hvad? Det viser sig, at det faktisk bliver en ortonormalbasis for hele $\mathbf{R}^n$.

I praktisk tale kan man derfor diagonalisere hver symmetrisk matrix A ved hjælp af en ortogonal basisskiftmatrix P og en diagonalmatrix D: $A = PDP^T$[1].

Denne formel kan man interpretere som spektraldekomposition. Søjlerne i matricen P danner en egenvektorbasis $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, og så kan man beregne: $A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T$.
Her er λ_i egenværdien svarende til egenvektoren $\mathbf{u}_i$ og matricen $P_i = \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$ beskriver projektionen (fra $\mathbf{R}^n$) på det 1-dimensionale underrum (linje) spændt af vektoren $\mathbf{u}_i$: $P_i(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i, P_i(\mathbf{u}_j) = \mathbf{0},\ i \neq j$.



[1] $P^{-1} = P^T$!



En anvendelse – keglesnit: Man kan overføre 2. ordens delen af ligningen for et keglesnit således at den beskrives ved en symmetrisk matrix. Egenvektorerne af denne matrix er symmetriakser for keglesnittet, og egenværdierne giver oplysninger om toppunkternes placering. Med andre ord: En rotation (ortogonalt basisskifte!) i retning af egenvektorerne giver en beskrivelse af keglesnittet i nye koordinater, som tillader at analysere keglesnittets form.

Litteratur:

SIF Ch. 6.6

Komp 38,39

Wikipedia Conic section; Matrix representation; Spectral theorem;

Illustration på nettet:

- Conic sections

Opgaver:

Ch. 6.5 9, 11, 17 – 36, 37, 39, 49, 51 53.

Ch. 6.6 13, 15.

Ch. 6.5+ 40, 41.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8855
-

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN