

# Lineær algebra: Spænd. Lineær (u)afhængighed

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag  
Aalborg Universitet

2011

# Linearkombinationer. Spænd

## Definition

Givet et antal vektorer  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$ .

En vektor  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_p\mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$ ,  $c_i \in \mathbf{R}$ , kaldes en **linearkombination** af vektorerne  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$ .

Vektorernes **spænd** er mængden af alle deres linearkombinationer:

$$\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} := \{c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_p\mathbf{a}_p \mid c_i \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n.$$

## Eksempler

- 1  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \text{Span}\{\mathbf{a}\} = \{c\mathbf{a} \mid c \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n$   
vektorer på en **linje** gennem Origo med retning  $\mathbf{a}$ .
- 2  $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \{c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$   
vektorer i en **plan** med retningsvektorer  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$   
– med mindre  $\mathbf{a}_1$  og  $\mathbf{a}_2$  ligger på én linie.

Bemærk: en hel plan, ikke bare en kvadrant!

Spænd  $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} \Leftrightarrow$

Vektorligningen  $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$  har en **løsning**

$$x_1, \dots, x_p \Leftrightarrow$$

Matrixligningen  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  har en **løsningsvektor**  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^p \Leftrightarrow$

( $A$  er matricen med søjlevektorer  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ )

Ligningssystemet med udvidet matriks  $[A | \mathbf{b}] = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_p | \mathbf{b}]$  er **konsistent**.

# Matrixligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Udspænder (søjle)vektorerne hele  $\mathbf{R}^m$ ?

En løsning  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$  til matrixligningen  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  med matrix  $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$  svarer til

- en løsning af vektorligningen  $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$
- en løsning af det lineære ligningssystem med totalmatrix  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ .

Udspænder (søjle)vektorerne hele  $\mathbf{R}^m$ ?

Matrixligningen har en løsning **for alle** vektorer  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$  hvis og kun hvis

- Ligningssystemet med totalmatrix  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$  har en løsning **for alle**  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$
- der efter en rækkereduktion af koefficientmatricen  $A$  findes Pivoter i **hver række**
- $\text{rang}A = m$ .

Specielt: Når  $n < m$  kan vektorerne  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  **ikke** uspænde hele  $\mathbf{R}^m$ !

# Lineær (u)afhængighed

## Definition

### Definition

- En ligning  $x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$  med reelle tal  $x_i$  kaldes en **afhængighedsrelation** mellem vektorerne  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  i  $\mathbb{R}^n$ .
- En mængde vektorer  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  kaldes **lineært afhængig** hvis de tillader en **ikke-triviell** afhængighedsrelation, dvs. en hvor **ikke alle**  $x_i$  er lig med 0.
- Mængden kaldes **lineært uafhængig** hvis den  **eneste** afhængighedsrelation mellem dem er givet ved den **trivielle** relation  $x_1 = \dots = x_p = 0$ .

### Betydning

- Lineært **afhængige** vektorer udspænder mindre end deres antal "berettiger til".  
Ikke-trivielle afhængighedsrelationer fører til "spild".
- Spændet af lineært **uafhængige** vektorer er maksimalt stort i forhold til antal af vektorerne. Hver vektor i spændet er **entydig** linearkombination af disse vektorer.

# Lineær (u)afhængighed

En opskrift

Hvordan afgør man om en mængde  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  af vektorer i  $\mathbf{R}^n$  er lineært afhængig eller uafhængig?

## Opskrift

- 1 Dan matricen  $A = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p]$  med vektorerne som søjlevektorer.
- 2 Rækkereduktion til echelonform.
- 3 Hvis alle søjler er Pivotsøjler, så er vektorerne lineært uafhængige – ellers lineært afhængige.

## Hvorfor?

$x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  med  $\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_p]$ .

En ikke-triviel afhængighedsrelation svarer altså til en ikke-triviel løsning af ligningssystemet givet ved matrixligningen  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ : mindst en fri variabel!

# Lineær uafhængighed

## Nogle kriterier

- Hvis  $\mathbf{0}$ -vektoren er indeholdt i en mængde vektorer, så er denne mængde altid **lineært afhængig**.
- En mængde af  $p$  vektorer i  $\mathbf{R}^n$  er altid **lineært afhængig** såfremt  $p > n$  – flere vektorer end dimensionen.
- En mængde af vektorer i  $\mathbf{R}^n$  er **lineært afhængig** hvis og kun hvis en af vektorerne er linearkombination af de andre.
- Med andre ord: En mængde af vektorer i  $\mathbf{R}^n$  er **lineært afhængig** hvis og kun hvis man kan fjerne en eller flere vektorer **uden** at spændet bliver mindre.
- Den er **lineær uafhængig** hvis fjernelse af en af vektorerne altid fører til et **mindre spænd**.

# Rang af en matrix

## Vigtige interpretationer

### Definition

Rangen af en  $m \times n$  matrix  $A$  = antal af Pivotsøjler.

Nullitet (defekt) = antal søjler uden Pivot.

### To rangkriterier

$A$  har rang  $m$   $Ax = b$  er konsistent for alle  $b \in \mathbf{R}^m$ ;

As søjlevektorer udspænder hele  $\mathbf{R}^m$ ;  
en Pivotposition i hver række.

$A$  har rang  $n$   $Ax = b$  har højst en løsning for et  $b \in \mathbf{R}^m$ ;

As søjlevektorer er lineært uafhængige;  
en Pivotposition i hver søjle.