

Lineær algebra: Matrixmultiplikation. Regulære og singulære matricer

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2011

Matrixmultiplikation

Definition

Definition

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]: AB = C = [c_{ij}]$ med

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} :$$

prikprodukt af A s i -te række med B s j -te søjle.

$\mathbf{c}_j = \mathbf{A} \mathbf{b}_j$: j -te søjle i $C = A * j$ -te søjle i B !

Forudsætning: n = antal af A s søjler = antal af B s rækker.

A, B, C matricer, således at produkterne er definerede; $r \in \mathbf{R}$.

Regler

- 1 (associativ) $A(BC) = (AB)C$
- 2 (venstre distributiv) $A(B + C) = AB + AC$
- 3 (højre distributiv) $(B + C)A = BA + CA$
- 4 $r(AB) = (rA)B = A(rB)$.
- 5 (neutralt element) $IA = AI = A$.
 I er enhedsmatricen med 1-taller på og 0-taller udenfor diagonalen.
- 6 (ikke kommutativ) $AB \neq BA$ (som regel)
- 7 $(AB)^T = B^T A^T$ (T : transposition)

Den inverse matrix

Definition

Definition

En $(n \times n)$ -matrix A kaldes **regulær** – eller invertibel – hvis og kun hvis der findes en $(n \times n)$ -matrix C således at

$$CA = AC = I \leftarrow \text{enhedsmatrix.}$$

og ellers **singulær**.

Entydighed

I så fald er C entydig bestemt; hvis C, D er inverse til A , så gælder:

$$C = CI = C(AD) = (CA)D = ID = D.$$

Man skriver A^{-1} for **den** inverse matrix til A .

A, B kvadratiske invertible matricer af samme størrelse.

Regler

- 1 A^{-1} er regulær og $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 AB er regulær og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- 3 A^T er regulær og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Den inverse matrix

En formel for (2×2) -matricer

Determinantkriterium

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ er}$$

regulær hvis **determinanten** $\det A = ad - bc \neq 0$ og
singulær hvis $\det A = 0$.

Formel for invers matrix

Hvis $\det A \neq 0$, så gælder:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Beregning af invers matrix

En opskrift

Rækkereduktion på udvidet matrix

- 1 Givet en $n \times n$ -matrix A . Opstil den udvidede $n \times 2n$ -matrix

$$[A|I_n]$$

med en identitetsmatrix I_n på højresiden.

- 2 Rækkeoperationer: Overfør denne udvidede matrix til reduceret echelonform $[H|C]$.
- 3 Hvis $H=I_n$ – Pivoter i hver søjle – så er A **regulær** og $C = A^{-1}$.
- 4 Hvis $H \neq I_n$, så er A **singulær**.

Definition

En elementær matrix er “næsten” en identitetsmatrix bortset fra

- Rækkeombytning (i -te og j -te række): 0 på diagonalen ved ii og jj , 1 ved ij og ji : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Rækkemultiplikation ($r \times i$ -te række): r i stedet for 1 ved ij : $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Rækkeaddition ($r \times i$ -te række lægges til j -te række): r i stedet for 0 ved ji : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix}$

Elementære matricer er regulære

En elementær matrix er **regulær**. Dens inverse matrix er den elementære matrix som svarer til den omvendte rækkeoperation.

Elementære matricer II

i forbindelse med rækkeoperationer

- Hver rækkeoperation svarer til multiplikation med en elementær matrix.
- Hvis A og B er rækkeækvivalente, så findes en regulær matrix P således at $B = PA$.
 P er produkt af flere elementære matricer (rækkeoperationer!)
- Det gælder specielt for den reducerede echelonmatrix R svarende til A : $R = PA$.
- Søjlekorrespondens mellem søjler i rækkeækvivalente matricer A og B :

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{b}_j \Leftrightarrow \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{a}_j.$$

- En Pivotfri søjle er linearkombination af foranstående Pivotsøjler.

Hvornår er en kvadratisk matrix A regulær?

Flere ækvivalente kriterier

Kriterier

- A er rækkeækvivalent til identitetsmatricen I_n .
- A har n Pivot positioner (og dermed en i hver række, en i hver søjle).
- $\text{rang}(A) = n$.
- $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ injektiv ($A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$).
- As søjler er lineært uafhængige.
- $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ surjektiv ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning for alle \mathbf{b}).
- As søjler udspænder \mathbf{R}^n .
- A kan skrives som produkt af elementære matricer.