Lineær algebra: Lineære afbildninger. Standardmatricer

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2011

Lineære afbildninger

En afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ fra definitionsmængden $\mathbf{R}^n$ ind i dispositionsmængden $\mathbf{R}^m$ "spiser" n-vektorer og "afleverer" m-vektorer.

Definition

En afbildning kaldes lineær, hvis den opfylder

- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$;
- $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ for alle $c \in \mathbf{R}, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$;

dvs., hvis T bevarer linearkombinationer.

En lineær afbildning opfylder altid: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
Geometri: Lineære afbildnigner

- overfører rette linjer i rette linjer, parallelogrammer i parallelogrammer
- bevarer proportioner langs med linjer

Matrix gange vektor som lineær afbildning

Lineære afbildninger og matricer

- Givet en $(m \times n)$-matriks A. Så er afbildningen $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ givet ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ en lineær afbildning.
- Enhver lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ kan på entydig vis beskrives som matrixafbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for en passende $(m \times n)$-matriks A.

Geometriske (mod-)eksempler

- Rotation (Drejning) i plan og rum
- Dilation (zoom, strækning), kontraktion i plan og rum
- Projektion fra rum til plan, fra plan til linje

Modeksempel:

- Translation (parallelforskydning)

Standardmatrix for en lineær afbildning
Opskrift

- Standard enhedsvektorer $\mathbf{e}_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \in \mathbf{R}^n$ med et enkelt 1-tal i position i generaliserer vektorerne $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1, \mathbf{j} = \mathbf{e}_2$ og $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$.
- Enhver vektor er linearkombination af standard enhedsvektorer:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

- Til en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ svarer en (standard) matrix A som opfylder $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle vektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$. A er en $(m \times n)$-matrix.

Opskrift

$A = [T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n)]$:
As søjler = billeder $T(\mathbf{e}_i)$ af standard enhedsvektorerne $\mathbf{e}_i$ under T.

Hvorfor? $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \Rightarrow$
$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots x_n\mathbf{e}_n) = x_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) = A\mathbf{x}.$

Simple lineære afbildninger og deres matrix repræsentationer

Geometriske lineære transformationer

- Refleksion i planen (i en akse eller en vinkelhalverende; mere generelt i en linie gennem Origo)
- Refleksion i rummet (i en koordinatplan; mere generelt i en plan gennem Origo)
- Drejning om Origo i planen
- Drejning om en akse gennem Origo i rummet (senere)
- Kontraktion, dilation, herunder identitetsafbildning
- Vridning[a]
- (Dobbelt retvinklet) Projektion

[a] eng.: shear

Givet en afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ og en vilkårlig vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$. Hvor mange vektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ "rammer" $\mathbf{y}$, opfylder $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$?

Definition

Afbildningen T kaldes

surjektiv (på, onto): der er mindst en $\mathbf{x}$ med $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$;

injektiv (one-to-one): der er højst en $\mathbf{x}$ med $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$;

bijektiv: der er præcist en $\mathbf{x}$ med $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Billedmængde og nulrum

billedmængde $T(\mathbf{R}^n) = \{\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\} \subseteq \mathbf{R}^m$

nulrum $\mathrm{Null}(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbf{R}^n$

T injektiv $\Leftrightarrow$ Null T indeholder kun vektoren $\mathbf{0}$.

Kriterier for surjektivitet/ injektivitet/ bijektivitet

Hvilke egenskaber har Ts standard matrix A når den lineære afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er surjektiv/ injektiv/ bijektiv?

surjektiv $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mindst en løsning
As søjler udspænder $\mathbf{R}^m \Leftrightarrow$ rang $A = m$.

injektiv $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har højst en løsning
As søjler er lineært uafhængige $\Leftrightarrow$ rang $A = n$.

bijektiv $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har netop en løsning
rang$A = n = m$.

Sammensætning og inversion af lineære afbildninger

Definition

- Givet lineære afbildninger $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ og $U : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$. Deres sammensætning er den lineære(!) afbildning $U \circ T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ givet ved $(U \circ T)(\mathbf{x}) = U(T(\mathbf{x})),\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.
- Givet en bijektiv lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Den har en invers lineær(!) afbildning givet ved $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \Leftrightarrow T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$.

Standardmatricer for sammensætning og inverse

- Sammensætning svarer til matrixmultiplikation:

$$T = T_A, U = T_B \Rightarrow U \circ T = T_{BA}.$$

- Inversion af bijektive lineære afbildninger svarer til inversion af matricer: $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$.