Lineær algebra
Determinanter

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2011

Determinanter

Definition

- $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$
  $a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} =$
  $a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$
  $+a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$
- $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$ $\leftarrow$ rekursiv definition
  udvikling efter 1. række.

A_{ij} undermatrix med i-te række og j-te søjle slettet.

$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$: komplement[1] til a_{ij}

Opløsning efter i-te række:

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in};$$

Opløsning efter j-te søjle:

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj}.$$

Alle opløsninger giver samme resultat.
Fortegnene $(-1)^{i+j}$: skakbrætmønster!
Opløsning anvendes igen på de nye $(n-1) \times (n-1)$ matricer – med nyt skakbrætmønster!

[1] eng.: cofactor

Rækkemultiplikation Række ganges med $k \rightsquigarrow$ determinanten ganges med k;

Rækkeombytning Determinanten skifter fortegn;

Rækkeaddition Determinanten uændret.

Theorem

Overføres $n \times n$-matricen A til echelonform U uden brug af rækkemultiplikationer og med r rækkeombytninger, så gælder:
$\det A = (-1)^r \cdot \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$
produkt af koefficienterne på hoveddiagonalen i U.

Theorem

A regulær $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
A singulær $\Leftrightarrow \det A = 0$.

Regler

- Hvis matricen A har to éns rækker: $\det A = 0$.
- $\det rA = r^n \det A$.
- $\det A^T = \det A$.
- $\det AB = (\det A)(\det B)$.
- Hvis B fås fra A ved at gange én række (hhv. én søjle) med $c \in \mathbf{R}$ (resten uændret!), så gælder:
$$\det B = c \det A.$$
- Givet tre matricer A, B, C som stemmer overens undtagen i j-te række/søjle, og således at $\mathbf{c}_j = \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j$. Så gælder:
$$\det C = \det A + \det B.$$