Lineær algebra: Underrum, basis, dimension

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2011

Definition

En delmængde $W \subset \mathbf{R}^n$ kaldes et underrum ($W \leq \mathbf{R}^n$) hvis der gælder:

- $\mathbf{0} \in W$[a];
- $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$;
- $\mathbf{u} \in W, c \in \mathbf{R} \Rightarrow c\mathbf{u} \in W$.

[a] sikrer at $W \neq \emptyset$

Konsekvens og interpretation

Enhver linearkombination $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ af vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in W$ er selv indeholdt i W.

Typiske eksempler

Linjer og planer gennem Origo

A en $m \times n$-matrix svarende til en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

Søjlerum og nulrum

Col $A \leq \mathbf{R}^m$ — As **søjlerum** udspændt af As søjler $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$: Col $A = Span\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$. Det indeholder alle elementer i billedmængden $T(\mathbf{R}^n) \leq \mathbf{R}^m$.

Nul $A \leq \mathbf{R}^n$ — As **nulrum** Nul $A := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Det består af alle løsninger af det homogene ligningssystem givet ved $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Basis for et underrum W

Definition

En delmængde $\mathcal{B} \subset W$ af et underrum W kaldes basis for W hvis

$\mathcal{B}$ udspænder W: $Span\mathcal{B} = W$ og
$\mathcal{B}$ er lineært uafhængig.

Konsekvens og interpretation

- En basis er en minimal udspændende delmængde (mest "økonomisk").
- Ethvert element $\mathbf{x} \in W$ har éntydige koordinater $c_1, \ldots, c_p$ med hensyn til en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ for W:
$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_p\mathbf{b}_p.$$

Koordinater for $\mathbf{x}$ mht. $\mathcal{B}$

$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [c_1, \ldots, c_p]$ findes ved at løse ligningssystemet $B\mathbf{c} = \mathbf{x}$ hvor B er matricen med søjlevektorer $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$: $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{x}$.

Basis for nulrum og søjlerum af matrix A

Givet $m \times n$-matrix $A = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$.
Overfør A i (reduceret) echelonmatrix $B = [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n]$.
Pivotsøjler i B svarer til bundne variable i ligningssystemerne $A\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow B\mathbf{x} = 0$; Pivotfrie søjler til frie variable.

Baser for nulrum og søjlerum

Basis for $Nul(A) = Nul(B)$: Løsningsvektorer svarende til "en fri variabel =1, de andre =0";

Basis for $Col(A)$: Dem af søjlerne $\mathbf{a}_i$ hvor søjlerne $\mathbf{b}_i$ er Pivotsøjler.

Theorem

Alle baser af et givet underrum $W \leq \mathbf{R}^n$ har det samme antal elementer.
Dette antal kaldes for underrummets dimension $\dim W \leq n$.

Rang og nullitet

A en $m \times n$-matrix.

$W = \text{Col } A$ dim(Col A)=rank A: matricens (søjle)rang.
Beregning: Antal Pivotsøjler!

$W = \text{Nul } A$ dim(Nul A)=nullity A.
Beregning: Antal frie variable!

Theorem

Rangsætning: $\quad \text{rank } A + \text{ nullity } A = n.$

Baser for et underrum $W \leq \mathbf{R}^n$ med dim $W = k$

Theorem

Givet et underrum $W \leq \mathbf{R}^n$, $\dim W = k$ *og* $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset W$.

1. *Span* $S = W \Rightarrow S$ *er basis for* W.
2. S *lineært uafhængig* $\Rightarrow S$ *er basis for* W.
3. $V \subset W$ *underrum af samme dimension* $k \Rightarrow V = W$.