

Lineær algebra:
Skift af basis og koordinater.
Matrixbeskrivelse af lineære afbildninger

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2011

Koordinater

med hensyn til en basis

Definition

For et underrum $W \leq \mathbf{R}^n$ med basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$ har hver vektor $\mathbf{v} \in W$ en entydig beskrivelse

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_p \mathbf{b}_p.$$

og kan dermed beskrives ved sin koordinatvektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ med hensyn til \mathcal{B} :

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [c_1 \dots c_p]^T \in \mathbf{R}^p.$$

Beregning af koordinater mht. \mathcal{B}

$\mathcal{B} \rightsquigarrow (n \times p)$ -matrix $B = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p]$ med basisvektorer som søjler.

Theorem

- $\mathbf{v} = B[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.
- Hvis $p = n$, så er B regulær og $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{v}$.

Koordinatskiftmatrix B^{-1} er **invers** til basisskiftmatrix B .

Anvendelse

Beskrivelse af keglesnit med udgangspunkt i keglesnittets symmetriakser.

Repræsentation af lineære operatører

Definition

En **lineær operator** er en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Matrix beskrivelse af lineær operator med hensyn til basis \mathcal{B}

Matrix repræsentationen af en lineær operator $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ med hensyn til en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ for \mathbf{R}^n er givet ved

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= [[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} \ [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} \ \cdots \ [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}}] \\ &= B^{-1} [T(\mathbf{b}_1) \ T(\mathbf{b}_2) \ \cdots \ T(\mathbf{b}_n)]. \end{aligned}$$

Dette sikrer: $[T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}$.

Beregning

Højresiden af den reducerede echelonmatrix svarende til

$$[\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n | T(\mathbf{b}_1) \ T(\mathbf{b}_2) \ \cdots \ T(\mathbf{b}_n)]$$

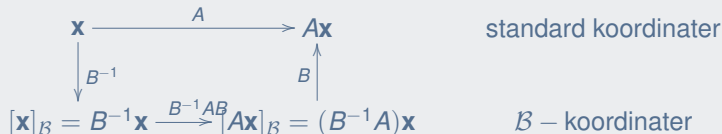
Standardmatrix \leftrightarrow Matrix med hensyn til basis \mathcal{B}

Theorem

Givet en lineær operator $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ og en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ for \mathbf{R}^n svarende til basisskiftmatrix $B = [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$. Så gælder:

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB.$$

Forklarende diagram



Definition

To $(n \times n)$ -matricer A, C er **similære** hvis der findes en regulær $(n \times n)$ -matrix B således at $C = B^{-1}AB$.