Lineær algebra: Ortogonalitet

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2011

Prikprodukt og norm

Definition

Givet vektorer $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]^T, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^T$.

Prikprodukt: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots u_n v_n$.

Norm/længde: $\| \mathbf{u} \|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots u_n^2$.

Afstand: mellem $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$: $\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|$.

Prikprodukt og matrixmultiplikation

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$ ($\leftarrow$ matrixmultiplikation)
- A en $(m \times n)$-matrix, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^m : A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A^T \mathbf{v}$.

Uligheder

Givet $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$.

Cauchy-Schwarz ulighed: $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \| \mathbf{u} \| \, \| \mathbf{v} \|$.

Trekantsulighed: $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \|$.

Ortogonale vektorer

Definition

- Vektorerne $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
- En vektormængde $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er ortogonal hvis vektorerne er indbyrdes ortogonale: $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}$ for $i \neq j$.
- Mængden S er ortonormal hvis den er ortogonal og hvis hver vektor er en enhedsvektor: $\| \mathbf{v}_j \| = 1$ for alle j.

Koordinater mht. ortogonale og ortonormale baser

Givet en basis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for et underrum $V \leq \mathbf{R}^n$ og en vektor $\mathbf{x} \in V$.

S ortogonalbasis: $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|^2}\mathbf{v}_k$.

S ortonormalbasis:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k.$$

Gram-Schmidt ortogonalisering

Mål:

Konstruktion af ortogonal- (eller ortonormal)basis $O = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for et underrum $V \leq \mathbf{R}^n$ med udgangspunkt i en basis $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ for V.

Metode

1. Ortogonalbasis
   - $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.
   - $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$
   - $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

   $\vdots$

   - $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_{k-1}}{\|\mathbf{v}_{k-1}\|^2}\mathbf{v}_{k-1}$.
2. Ortonormalbasis ved normering: $\left\{\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}, \cdots, \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|}\right\}$.

Ortogonalprojektion

Definition

Det ortogonale komplement til en delmængde $S \subset \mathbf{R}^n$ defineres som

$$S^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n | \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ for alle } \mathbf{u} \in S\}.$$

Givet et underrum $W \leq \mathbf{R}^n$ med ortogonalt komplement $W^\perp$ og en vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Ortogonal opsplitning

Vektoren kan skrives som

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{z}, \ \mathbf{w} \in W, \mathbf{z} \in W^\perp,$$

og det netop på én måde. Hvis man kender en ortonormalbasis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for W, så bestemmes $\mathbf{w}$ ved

$$\mathbf{w} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k.$$

Ortogonalprojektion på underrum

Definition

Den ortogonale projektion $U_W : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ på et underrum $W \subset \mathbf{R}^n$ er den lineære operator givet ved $U_W(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \in W$. Der gælder altså: $\mathbf{x} = U_W(\mathbf{x}) + \mathbf{z}, \mathbf{z} \in W^{\perp}$.

Standardmatrix for ortogonalprojektion U_W

Basisvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k \in W$ indsættes som søjler i en $(n \times k)$-matrix C. Så er standardmatricen P_W for ortogonalprojektionen U_W på W givet ved

$$P_W = C(C^T C)^{-1} C^T.$$