Lineær algebra: Ortogonale og symmetriske matricer

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2011

Ortogonale matricer: Definition

Definition

- En lineær operator $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ er ortogonal (en isometri) når $\| T(\mathbf{x}) \| = \| \mathbf{x} \|$ for alle vektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.
- En $n \times n$-matrix Q er ortogonal hvis søjlevektorerne i Q danner en ortonormal basis for $\mathbf{R}^n$.

Ækvivalente kriterier: En $n \times n$-matrix Q er ortogonal når

1. $Q^T Q = I_n$.
2. Q er regulær og $Q^{-1} = Q^T$.
3. $Q\mathbf{u} \cdot Q\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$.
4. $\| Q\mathbf{u} \| = \| \mathbf{u} \|$ for alle $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$.

Ortogonale matricer: Egenskaber og eksempler

Egenskaber

For ortogonale matricer P og Q gælder:

1. PQ er ortogonal.
2. $Q^{-1} = Q^T$ er ortogonal.
3. $\det Q = \pm 1$.

En ortogonal 2×2-matrix Q med

$\det Q = 1$ er på form $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (rotation om Origo med vinklen θ).

$\det Q = -1$ er på form $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ (spejling i linie gennem Origo med vinklen $\frac{\theta}{2}$ i forhold til X-aksen).

(Stive) flytninger

Definition

En afbildning $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ kaldes en stiv flytning (eng.:rigid motion) når den er afstandsvevarende:

$$\| F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v}) \| = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| .$$

OBS: En stiv flytning behøver ikke være lineær.
Eksempel: En parallelforskydning $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ fast.

Stive flytninger og ortogonale matricer

Enhver stiv flytning $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ er på formen

$$F(\mathbf{u}) = Q\mathbf{u} + \mathbf{c}$$

med en ortogonal $n \times n$-matrix Q og en fast vektor $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ – sammensætning af en ortogonal operator og en parallelforskydning.

Symmetriske matricer

Definition

En kvadratisk matrix er symmetrisk hvis $A^T = A$.

Diagonalisering af symmetriske matricer

En $n \times n$-matrix A er symmetrisk hvis og kun hvis der findes en ortonormal basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ for $\mathbf{R}^n$ som består af egenvektorer for A. I så fald kan A diagonaliseres på formen $A = PDP^T$ med

- den ortogonale matrix $P = [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2, \dots \mathbf{u}_n]$ og
- diagonalmatricen $D =$diag$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

når $A\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$.

Spektral opsplitning/dekomponering

En symmetrisk matrix A som ovenfor kan opskrives på formen

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n$$

hvor $P_i = \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$ projicerer $\mathbf{R}^n$ på linien gennem $\mathbf{u}_i$ (rang 1!).

Kvadratiske former og keglesnit

Definition

Givet en symmetrisk $n \times n$-matrix A. Udtrykket

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T A\mathbf{v}, \ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$$

kaldes den kvadratiske form beskrevet ved A.

For $n = 2$ beskriver ligningen $T(\mathbf{v}) = c, \ c$ en reel konstant, et keglesnit i planen.

Naturlige koordinater

Basis- og koordinatskifte ved den ortogonale matrix P fra diagonaliseringen $A = PDP^T$. Sæt $\mathbf{y} = P\mathbf{v}$. Så gælder:

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T A\mathbf{v} = \mathbf{v}^T PDP^T\mathbf{v} = (P^T\mathbf{v})^T D(P^T\mathbf{v}) = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

$n = 2$: Søjlerne i P svarer til keglesnittets symmetriakser.