Velkommen til projektenhedskurset på MAT1& SUMA3! Information om dette kursus, især alle lektionsplaner ("spisesedler") finder I (efterhånden) på kursets hjemmeside. Skemaet for hele semestret findes fra institutets hjemmeside `- For Studerende - Mat1/2 - Skema`. Jeg vil gerne bede jer om at købe kursuslitteraturen i centerboghandelen – vi skal allerede første gang bruge bogen om differentialligninger under opgaveregning.

Forelæsning

kl. 8:15 – 10:15 i FRB7G5-112.

Mål og indhold:

Kurset begynder med en introduktion til emnet *Differentialligninger og dynamiske systemer*, som er et centralt emne for projekterne på semestret.

At løse ligninger, betyder at løse en *gåde*. Man kender en sammenhæng mellem tal eller funktioner og skal derfra benævne eller beskrive løsningstal eller løsningsfunktioner:

Når man løser en ligning eller et ligningssystem drejer det sig om at finde frem til *tal* eller *vektorer*, hvis indbyrdes sammenhæng er beskrevet ved ligningen.

At løse en *differentialligning* eller et *system af differentialligninger* betyder, at man skal finde frem til en *funktion* (eller flere funktioner), hvor man kun kender en sammenhæng (en ligning) mellem funktionen og nogle af dens afledede. For bestemte typer ligninger kan man faktisk finde frem til en *eksakt* løsning *algoritmisk* – der findes en løsnings*metode*. Men i mange tilfælde må man nøjes med at finde en omtrentlig løsning *approksimativt* ved numeriske metoder. Eller man kan i det mindste finde ud af interessante *egenskaber* som en løsning besidder.

Under den første forelæsning ser vi på flere eksempler på differentialligninger og deres løsningsfunktioner. Det er ikke altid muligt at beskrive løsninger på lukket form, dvs., ved hjælp af i forvejen kendte funktioner. Men ofte kan man alligevel finde frem til en del af løsningernes egenskaber; f.eks., hvordan de opfører sig i det lange løb (for $t \mapsto \pm\infty$), om der er periodiske løsninger eller lign. Undervejs kommer vi ind på vigtige begreber og konstruktioner i forbindelse med en differentialligning på formen $x'(t) = f(x(t))$:

Vigtige definitioner:

den generelle løsning, s.2 (mængden af) alle differentiable funktioner $x(t)$, som opfylder ligningen $x'(t) = f(x(t))$

begyndelsesværdiproblem, s.2

$$x'(t) = f(x(t)),\ x(t_0) = x_0$$

løsning til begyndelsesværdiproblem, s.2 en differentiabel funktion $x(t)$ som opfylder $x'(t) = f(x(t)), x(t_0) = x_0$
(er i godartede tilfælde entydigt bestemt)

ligevægtspunkt, s.2 et punkt u_0 med $f(u_0) = 0$

ligevægtsløsning, s.2 svarende til ligevægstpunkt u_0: den konstante funktion $x(t) = u_0$

dræn, s.3 et ligevægtspunkt u_0, således at alle løsninger $x(t)$ til begyndelsesværdiproblemer $x'(t) = f(x(t)), x(t_0) = u_0 + \varepsilon, |\varepsilon|$ lille, opfylder: $\lim_{t\to\infty} x(t) = u_0$ (løsninger konvergerer mod u_0).
Et ligevægtspunkt u_0 er et dræn hvis $f'(u_0) < 0$ (og f er differentiabel)

kilde, s.3 et ligevægtspunkt x_0, således at alle løsninger $x(t)$ til begyndelsesværdiproblemer $x'(t) = f(x(t)), x(t_0) = u_0 + \varepsilon, |\varepsilon|$ lille, opfylder: $\lim_{t\to-\infty} x(t) = u_0$ (løsninger fjerner sig fra u_0).

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9635 8855
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN

Et ligevægtspunkt u_0 er en kilde hvis $f'(u_0) > 0$ (og f er differentiabel)

faselinie, s.3 tegning af den reelle linie hvor man markerer ligevægstpunkter samt pile i intervallerne imellem dem, som indikerer mod hvilket af endepunkterne en løsning som starter i intervallet konvergerer for $t \mapsto \infty$.

hældningsfelt, s.6 svarende til f: en plan tegning som knytter til punktet (t_0, x_0) et lille liniestykke med hældning $f(x_0)$.

bifurkationsdiagram, s.8 er defineret for en *familie* af differentialligninger $x'(t) = f_a(x(t))$ med parameter a. Den samler i et plant diagram alle faselinier for forskellige værdier a. Ligevægtspunkter ligger typisk på kurver. Bifurkationer er de værdier a hvor antallet af ligevægtspunkter skifter (gerne fra 2 over et til nul eller omvendt). Løsninger på de to sider af en bifurkation har forskellig opførsel.

Litteratur:

M.W. Hirsch, S. Smale, R.L Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems & an Introduction to Chaos*, kap. 1.1-1.4, s. 1-12.

Software:

Vi vil med jævne mellemrum eksperimentere med en numerisk og grafisk "ODE-solver". Gå på nettet til siden Conrad. Click på `Jump to - Chapter 1 - ODE-solver` og efterfølgende på `DFIELD 2002.2`. I `Direction Field Window` kan man få løsninger beregnet ved at klikke på en begyndelsesværdi i feltet. Man kan ændre differentialligningen ved at skrive i `Equation Window`.

Opgaveregning:

kl. 10:15 – 12 i grupperummene.
Læreren kommer rundt i grupperne som konsulent. I skal brug denne resurse: Overvej hvad I vil spørge om, både i forbindelse med forelæsning og med opgaverne. Jeg går ud fra at I har set på opgaverne hjemmefra: Hvad drejer de sig om, hvad forventes der mon?

Opgaver:

[HSD] kap.1, s. 16/17: Opg.1, 4, 7

Vink:

1 Prøv med funktioner af typen $x(t) = Ce^a t + D$

7 Prøv med funktioner som sammensættes af funktioner af typen $x(t) = C_1 e^t + D_1$, hhv. $x(t) = C_2 e^{-t} + D_2$

Næste gang:

Onsdag, den 6.9., kl. 8:15 – 12:00.
Lineære systemer.
Litteratur: [HSD], kap. 1.5, s. 12 – 15; kap. 2.1 – 2.2, s. 21 – 26; kap. 2.6 – 2.7, s. 33 – 36.
Kap. 2.3 – 2.5 indeholder stof som er kendt fra basisåret.

En anbefaling til projektarbejdet:

I kurset vil vi i det følgende som regel gå ud fra at et begyndelsesværdiproblem (se definition på første side) har en éntydig løsning. Det er *ikke* altid rigtigt; i kurset om metriske rum lærer I om en betingelse der sikrer dette. Lærebogens opg. 12 (s. 18) giver eksempler på simple differentialligninger som ikke fører til entydige løsninger. Opgave 11 viser, at man ikke altid kan fortsætte en løsning i al evighed (dvs., for vilkårlig store eller små værdier t).

Jeg vil *meget stærkt anbefale*, at projektgrupperne i de første uger bruger tid på at arbejde med disse to meget illustrative opgaver. De giver en større respekt for de resultater I skal høre om; det er ikke så selvfølgeligt, at de er rigtige!