Repetition og perspektivering

kl. 8:15 – 8:45 i G5-112.
Partielle afledede og differentiabilitet.

Opgaveregning

kl. 8:45 – 10:30 i grupperummene.

Opgaver:

Wade, kap. 11.1, p. 329 – 330 Opg. 1(b), 2(c)[1], 3(a)[2], 5(b)

Wade, kap. 11.2 p. 338 Opg. 1(d)[3], 2[4]

Eksempel Vis at funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, f(x,y) = |xy|$ er differentiabel i $(0,0)$, men ikke engang partielt differentiabel i andre punkter på koordinatakserne.[5]

Forelæsning:

kl. 10:30 – 12:00 i G5-112.

Mål og indhold:

Hvis en funktion af flere variable $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er differentiabel i et punkt, hvordan kan man så bestemme differentialet, den bedst approksimerende lineære afbildning i en omegn af punktet? Givet baser for vektorrummene, så kan en lineær afbildning jo altid beskrives ved hjælp af en matriks. Vi bruger standardbaserne for $\mathbf{R}^n$ og $\mathbf{R}^m$, og får den såkaldte Jacobi-matriks – m rækker, n søjler. Matricens koefficienter beskriver lineære approksimationer til koordinatfunktionerne $f_1, \dots f_m$ mht. variation langs med paralleler til akserne – de *partielle afledede* af koordinatfunktionerne bliver til Jacobi-matricens *række*vektorer.

Er det tilstrækkeligt at kræve at de partielle afledede eksisterer i et punkt for at være sikker på at funktionen er differentiabel der? *Nej!*; se Eks. 11.17 og 11.18. Det burde man heller ikke forvente: Man kan ikke "se"om en funktion har en god lineær approksimation ved kun at sigte parallelt med akserne. Med denne baggrund er det faktisk en smule forbavsende, at det følgende beskedne?) krav er nok til at sikre differentiabilitet: De partielle afledede skal eksistere i en lille ”kugle” omkring punktet og være *kontinuerte* i punktet (Thm. 11.15).

Differentialet er en lineær afbildning, og mere end det, en derivation: Den opfylder produktreglen. Der er også en kæderegel for funktioner af flere variable, som nemt kan udtrykkes ved lineære afbildninger, hhv. matricer: $D(f \circ g)(\mathbf{a}) = Df(g(\mathbf{a})Dg(\mathbf{a})$. I ord: Den bedste lineære approksimation til sammensætningen af to differentiable afbildninger er sammensætningen af de bedste lineære approksima-

[1] Origo $(0,0)$ er speciel: Eksisterer de partielle aflede der?

[2] Igen er det i Origo, hvor der kan være problemer; i Origo kan de partielle afledede kun beregnes vha. definitionen; facit 0; i alle andre punkter kan man bruge kvotientreglen. Konvergerer de partielle afledede i omegnen af Origo mod 0?

[3] Polære koordinater!

[4] Vis først at de partielle afledede af funktionen i $(0,0)$ giver 0. Hertil skal definitionen (s.322) bruges. Undersøg om $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{h})-f(\mathbf{0})}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ eksisterer – se f.eks. på hvad brøken giver langs med en ret linie $y = kx$.

[5] En plot fås i MAPLE med følgende kommando: `with(plots): plot3d(abs(x*y),x=-1..1,y=-1..1);`

tioner til dem hver især.

MAPLE

Den geometriske betydning af partielle afledede og af differentialet illustreres på en MAPLE-ark, som kan downloades fra hjemmesiden; på samme ark illustreres et eksempel på en funktion med partielle afledede i alle punkter, som *ikke* er differentiabel.

Litteratur:

Wade Kap. 11.2, pp. 333 – 337, 11.4.

Næste gang:

Tirsdag, den 7.11., kl. 8:15 – 12:00.
Middelværdisætninger og Taylor-formel for funktioner af flere variable
Wade, kap. 11.3, pp. 341 – 344, kap. 11.5