Repetition og perspektivering

kl. 8:15 – 8:45 i G5-112.
Linearisering af dynamiske systemer i ligevægtspunkter: kilde, dræn, sadelpunkt.

Opgaveregning

kl. 8:45 – 10:30 i grupperummene.

Opgaver:

HSD, pp. 185 – 186 Opg. 5[1]

HSD, pp. 186 Opg. 7[2]

Forelæsning:

kl. 10:30 – 12:00 i G5-112.

Mål og indhold:

I lektionens første del afslutter vi analysen af et ikke-lineært system i et omegn af et sadelpunkt. Det mest komplicerede er at indse, at der er netop to (modsat rettede) stabile løsningskurver. I beviset indgår teknikker fra kap. 7.4 (om variationsligningen), som gennemgås i et specielt tilfælde og uden bevis.

Herefter begynder vi at se på forskellige stabilitetsbegreber (se definitionerne nedenfor) vedr. omegne af ligevægtspunkter. Tiltrækker/frastøder punktet alle løsninger, der kommer tæt nok på? Vil løsninger i det mindste forblive tæt på når de først er kommet i nærheden? Og hvordan kan man undersøge om dette er tilfældet? En første indikation (især i 2D) giver de såkaldte nul-kliner, som deler planen op i regioner (med hjørner i ligevægtspunkter!) langs hvilke løsningskurver går mod forskellige "verdenshjørner": nordvest, sydøst osv.

Definitioner:

For et 2D-sadelpunkt $\mathbf{x}_0$ består den

stabile kurve af alle punkter $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$ med $\lim_{t\to\infty} \Phi(t, \mathbf{z}) = \mathbf{x}_0$;

ustabile kurve af alle punkter $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$ med $\lim_{t\to-\infty} \Phi(t, \mathbf{z}) = \mathbf{x}_0$.

Et ligevægtspunkt $\mathbf{X}^*$ kaldes[3]

stabil hvis der til enhver omegn $x \in O$ findes en (mindre) omegn $x \in O_1 \subseteq O$, således at enhver løsning $X(t)$ med $X(0) \in O_1$ har egenskaben: $X(t) \in O$ for $t > 0$.

asymptotisk stabil hvis $\mathbf{X}^*$ er stabil og derudover gælder: $\lim_{t\to\infty} X(t) = X^*$ når $X(0) \in O_1$.

ustabil når den *ikke* er stabil, dvs., der findes en omegn $x \in O$, således at der i *enhver* omegn $x \in O_1 \subseteq O$ findes en løsning $X(t)$ med $X(0) \in O_1$ og et $t_0 > 0$ med $X(t_0) \notin O$.

Litteratur:

HSD kap. 8.3 – 8.4, pp. 170 – 176. Kap. 9.1, pp. 189 – 192.

[1] Vink: Bestem først løsningsmængden til ligningerne $x^2 + y = 0, x - y + a = 0$. Tegning!
(c) Bifurkation: Pludselig ændring af løsningers opførsel, især vedr. ligevægtspunkters karakteristik

[2] I polære koordinater er der tale om to ikke-koblede differentialligninger. Tegn *faselinierne* for dem hver især – og overfør resultatet til XY-planen. Prøv med $-1 < a < 0, a = -1, a < -1$.
Man kan også oversætte ligningerne fra polære til xy-koordinater og generere spændende faseplots.

[3] Lav selv forklarende tegninger!

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9635 8855
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
- HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN

Næste gang:

Tirsdag, den 21.11., kl.8:15 – 12:00.
Bifurkationer. Stabilitetsundersøgelser vha. Liapunov funktioner.
Litteratur: [HSD], kap. 9.1-9.2, pp. 192 – 200.