Repetition og perspektivering

kl. 8:15 – 8:45 i G5-112.
Linearisering af dynamiske systemer i sadelpunkter. Stabilitet og asymptotisk stabilitet. Nulkliner og positiv invariante områder.

Opgaveregning

kl. 8:45 – 10:30 i grupperummene.

Opgaver:

HSD, kap. 8, p. 186 Opg. 7[1]

HSD, kap. 8, p. 187 Opg. 12.[2].

HSD, kap. 9, p. 211 – 212 Opg. 1(a),(b),(e)

Forelæsning:

kl. 10:30 – 12:00 i G5-112.

Mål og indhold:

Vi indfører teknikker som kan hjælpe os med følgende problemer:

- Hvordan kan man afgøre om et (ikke-hyperbolsk) ligevægtspunkt er (asymptotisk) stabil?
- Hvordan kan man bestemme størrelsen af *attraktionsskålen* svarende til et stabilt ligevægtspunkt?

Til begge spørgsmål kan man forsøge at finde og anvende en Liapunovfunktion, dvs. en differentiabel funktion som (strikt) aftager langs med løsningskurver og som har et lokalt minimum i ligevægtspunktet. Liapunovs sætning fortæller, at eksistensen af en Liapunovfunktion i en omegn af ligevægstspunktet sikrer (asymptotisk) stabilitet. I beviset følger man Ls værdier langs med en konvergent følge af punkter på en given løsningskurve og ser derfra at det eneste mulige grænsepunkt er selve ligevægtspunktet. Sætningen illustreres ved et fysisk eksempel: et pendul med dæmpning.

Desuden: Hvis ligevægtspunktet har en *kompakt* (dvs. lukket og begrænset) og *positiv invariant* (løsningskurver forlader den ikke) omegn således at Liapunovfunktionen ikke er konstant på nogen løsningskurve i omegnen, så tilhører omegnen attraktionsskålen. I begge tilfælde viser man, at det eneste ω-limespunkt for en løsning er ligevægtspunktet.

Definitioner:

En differentiabel funktion $L : \mathcal{O} \to \mathbf{R}$ med $L(X^*) = 0$ kaldes

positiv definit hvis $L > 0$ på $\mathcal{O} \setminus \{X^*\}$

negativ semidefinit hvis Ł ≤ 0 på $\mathcal{O} \setminus \{X^*\}$ og

negativ definit hvis $L < 0$ på $\mathcal{O} \setminus \{X^*\}$

Givet et dynamisk system $X' = F(X)$ med flow Φ. Et punkt $z \in \mathbf{R}^n$ kaldes

ω-limespunkt hvis der findes en begyndelsesværdi x_0 og en følge $t_n \in \mathbf{R}$ med $lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ og $\lim_{n\to\infty} \Phi(t_n, x_0) = z$.

[1] I polære koordinater er der tale om to ikke-koblede differentialligninger. Tegn faselinierne for dem hver især – og overfør resultatet til XY-planen. Prøv også at oversætte ligningerne fra polære til xy-koordinater (Differentier $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ mht. t) og at generere de spændende faseplots.

[2] Hvad med $r' = r - r^3, \theta' = 1 - \theta$?

α-limespunkt hvis der findes en begyndelsesværdi x_0 og en følge $t_n \in \mathbf{R}$ med $lim_{n\to\infty} t_n = -\infty$ og $\lim_{n\to\infty} \Phi(t_n, x_0) = z$.

I bogens eksempel på side 162 – 163 er alle punkter på enhedscirklen både ω-limespunkter og α-limespunkter. Desuden er origo et α-limespunkt.

Litteratur:

HSD kap. 9.2, pp. 194 – 203.

Næste gang:

Torsdag, den 23.11., kl.8:15 – 12:00.
Højere ordens lineære systemer
Litteratur: [HSD], kap. 6.1, pp. 107 – 113; kap. 6.2, pp. 119 - 122.