Repetition og perspektivering

kl. 8:15 – 8:45 i G5-112.
Lineære differentialligningssystemer med konstante koefficienter: diagonaliserbare matricer og løsninger.

Opgaveregning

kl. 8:45 – 10:30 i grupperummene.

Opgaver:

HSD, kap. 6, p. 136 Opg. 1(a),(b),(c),(f).

HSD, kap. 6, p. 137 Opg.2[1], 3[2].

HSD, kap. 6, p. 137 Opg. 8[3], 11[4].

Forelæsning:

kl. 10:30 – 12:00 i G5-112.

Mål og indhold:

Én lineær differentialligning $x' = \lambda x$ har $x(t) = C\exp(\lambda t), C \in \mathbf{R}$ som sin generelle løsning. Analogt burde et lineært system $X' = \mathbf{A}X$ have en generel løsning på formen $X(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{C}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^n$. Det passer faktisk – og man viser det stort set på samme måde – bare man på en konsistent måde kan definere eksponentialfunktionen for matrier $\mathbf{A}$. Det gøres ved hjælp af eksponentialfunktionens Taylorrække; man indsætter $\mathbf{A}$ i stedet for t. Det er rigtigt, men ikke helt nemt at vise, at denne række (uendelig sum) konvergerer for enhver matriks $\mathbf{A}$.

Med en smule lineær algebra er det forholdsvis lidt at komme udenom konvergensproblemet; desuden får man en måde til at *beregne* eksponentialfunktionen med udgangspunkt i egenværdier og generaliserede egenvektorer. Det er nemlig nemt at beregne eksponentialafbildningen for *semi-simple = diagonaliserbare* og for *nilpotente* matricer (se definitionen nedenfor). Den generelle løsning beror på at man kan beskrive enhver kvadratisk matriks $\mathbf{A}$ på formen $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$ hvor $\mathbf{S}$ er semi-simpel (diagonaliserbar), $\mathbf{N}$ er nilpotent og begge matricer kommuterer ($\mathbf{SN} = \mathbf{NS}$). I baggrunden lurer den lidt tunge sætning om Jordans normalform (Axler, pp. 186, Thm. 8.47) fra den lineære algebra. Denne måde at beregne eksponentialfunktionen på findes ikke i tekstbogen.

Hvordan kommer nilpotente matricer ind i billedet? Hvis en matriks $\mathbf{A}$ har multiple egenværdier, så er den similær til en sum af en diagonalmatriks D og en matriks N som kun må have ikke-fosvindende koefficienter lige over diagonalen. En sådan matriks N er klart nilpotent!

Definition:

En kvadratisk matriks $\mathbf{A}$ kaldes

semi-simpel hvis der findes en invertibel matriks $\mathbf{T}$ således at $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ er en diagonalmatriks;

nilpotent hvis der findes $k > 0$, således at

[1] Inspiration fra 2D: s. [HSD], p.43
[2] Vink: Hvilke egenværdier skal matricen have?
[3] Bestem først løsningskurverne i de to-dimensionale underrum svarende til egenværdierne $\pm i\sqrt{2}$, hhv. $\pm i\sqrt{3}$. Er der andre lukkede banekurver? Det er der ikke, fordi $\sqrt{\frac{3}{2}}$ er et irrationalt tal!
[4] Hvordan opfører løsninger sig for $t \to \pm\infty$?
[5] Axler, p. 167

$\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$.[5]

Litteratur:

HSD kap. 6.4, pp. 123 – 130.

Axler Vi plukker fra kapitel 8 – uden beviser.

MIT-noter Klik på R5 på denne side.

Og det bliver så *sidste* gang. Tak for jeres opmærksomhed og jeres deltagelse! Og held og lykke med projekterne! Og med eksamen og hele det fortsatte studieforløb!

Venlig hilsen
Martin