Repetition og perspektivering

kl. 8:15 – 8:45 i G5-112.
Typiske 2D lineære systemer og deres generelle løsning. Egenværdier og karakteristik af ligevægstpunktet. Faseportrætter.

Opgaveregning

kl.8:45 – 10:30 i grupperummene.

Opgaver:

- Givet et system $x_1' = f_1(x_1, x_2), x_2' = f_2(x_1, x_2)$. Antag at $f_2(u_1, u_2) = 0$ for en vektor $[u_1, u_2] \in \mathbf{R}^2$. Hvad siger denne information om løsningskurven[1] igennem punktet (u_1, u_2)?
- På basisåret lærte I hvordan man løser en homogen lineær anden ordens differentialligning $x'' + ax' + bx = 0$ ved hjælp af rødderne i karakterligningen $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Interpreter denne differentialligning som et system af to koblede lineære differentialligninger, find det karakteristiske polynomium, egenværdier, egenvektorer, løsninger (se sammenfatningen nedenfor). Sammenlign de to metoder.
- fra [HSD], kap. 2, s. 38, opg. 9[2], 10[3]
- fra [HSD], kap. 3, s. 59/60, opg. 8, 11.

Forelæsning:

kl. 10:30 – 12:00 i G5-112.

[1] Vink: løsningskurvens tangent
[2] Vink: $x_1' = -x_1, x_2' = ?$
[3] Vink: $x_1' = ?, x_2' = 0$

Mål og indhold:

Dynamiske systemer svarende til generelle invertible (2×2)-matricer opfører sig på samme måde som vi så det i et af de foregående typiske eksempler. Det skyldes at en sådan matriks er *similær* til en af de matricer vi har undersøgt ("normalformen"). Og løsningerne til systemer svarende til similære matricer er relateret til hinanden på en simpel og overskuelig måde. Helt generelt får man følgende klassifikation af ligevægtspunkter: Der er

- dræn, kilder eller sadelpunkter, hvis matricen har to lineært uafhængige egenvektorer svarende til reelle egenværdier
- spiraldræn, spiralkilder eller centerpunkter hvis matricen har to kompleks konjugerede egenværdier
- et overgangstilfælde hvis matricen har en egenværdi af algebraisk multiplicitet *to* med tilsvarende egenrum af dimension *en*.

Det kan afgøres på en overskuelig måde, hvilket af tilfælde man har at gøre med, hvis man plotter talparret $(\det A, \operatorname{tr} A)$ i planen – se Figure 4.1 i lærebogen (s. 63).

Vi undersøger iøvrigt de forskellige løsningers opførsel for $t \to \pm\infty$.

Generelle løsninger – en sammenfatning

to lineært uafhængige egenvektorer
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ med tilhørende reelle egenværdier λ_1, λ_2:
$C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2,\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

kompleks egenvektor $\lambda = \alpha + i\beta$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$:
$e^{\alpha t}[(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t)\mathbf{v}_1 + (-C_1 \sin\beta t + C_2 \cos\beta t)\mathbf{v}_2],\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

en egenværdi λ med alg. multiplicitet 2 egenvektor $\mathbf{v}$ samt vektor $\mathbf{w}$ med $\mathbf{Aw} = \lambda\mathbf{w} + \mathbf{v}$:
$e^{\lambda t}[(C_1 + C_2 t)\mathbf{v} + C_2\mathbf{w}],\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

Litteratur:

[HSD], kap. 3.4 – 4.1, s. 49 – 57, 61 – 64.

Næste gang:

Torsdag, den 14.9., kl. 8:15 – 12:00.
Litteratur: [HSD], kap. 4.2, s. 64 – 71. Homeomorfi. Konjugerede systemer. Hyperbolske (system)-matricer.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G | 9635 8855 | RAUSSEN@MATH.AAU.DK
9220 AALBORG ØST - HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN