1(d) $x^x = e^{x\log x}$; $\lim_{x\to 0+} x\log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = {}^1 \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0+} x^x = e^{\lim_{x\to 0+} x\log x} = e^0 = 1.$

3(a) Om f er differentiabel i $x = 0$ undersøges ved en beregning af differentialkvotienten: $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = {}^2 \lim_{x\to 0} \frac{-x^{-2}}{-2x^{-3}e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$

4(b) Undersøger monotoni for funktionen $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}, x \mapsto \frac{\log x}{x^\alpha}$: $f'(x) = \frac{x^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1}\log x}{x^{2\alpha}} = \frac{1-\alpha\log x}{x^{\alpha+1}}$. Da $\log x$ er strikt monotont voksende, er f' strikt monotont aftagende. f' antager værdien 0 for $\alpha\log x = 1$, dvs. for $x_\alpha = e^{\frac{1}{\alpha}}$. Dermed er f strikt monotont voksende indtil x_α og strikt monotont aftagende efter x_α. f antager et globalt maksimum $f(x_\alpha) = C_\alpha = \frac{1}{e\alpha}$ i x_α. Specielt gælder: $\log x \leq \frac{x^\alpha}{e\alpha}$ og $C_\alpha = \frac{1}{e\alpha}$ går mod 0 når $x \mapsto \infty$, mens $C_\alpha = \frac{1}{e\alpha}$ går mod ∞ når $x \mapsto 0$.

[1] l'Hôpital
[2] l'Hôpital

FREDRIK BAJERSVEJ 7G — 9635 8855 — RAUSSEN@MATH.AAU.DK
9220 AALBORG ØST — HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN