Repetition og perspektivering

kl. 8:15 – 8:45 i G5-112.
Approksimation med Taylorpolynomier. Vurdering af restledet.

Opgaveregning

kl. 8:45 – 10:30 i grupperummene.

Opgaver:

1 Bestem et polynomium $p(x)$ af minimal grad, der gør det muligt at beregne $\sin(x)$ på intervallet $[-1,1]$ med en absolut fejl på højst 0.0002. Bestem $p(1)$ og $\sin(1)$ og fejlen for $x = 1$ – vha. lommeregner, MAPLE eller lign.

I de følgende opgaver skal vi arbejde med Taylorudviklingen af de hyperbolske funktioner, som blev introduceret på forrige ugeseddel (8. lektion; gå evt. til disse opgaver først!)

2 Bestem Taylorpolynomierne $P_n^{f,0}(x)$ for funktionerne $f(x) = \cosh x$ og $f(x) = \sinh x$.

3 Vis at restledet for Taylorudviklingen af $f(x) = \sinh x$ i udviklingspunktet 0 er givet ved

$$R_n^{f,0}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) x^{n+1}$$

hvor $0 < |\xi| < |x|$ og $f^{n+1}(\xi) = \sinh \xi$ hvis n er ulige og $f^{n+1}(\xi) = \cosh \xi$ hvis n er lige.

4 Redegør for at der for et vilkårligt $x \in \mathbf{R}$ gælder: $\lim_{n\to\infty} R_n^{f,0}(x) = 0$[1].

5 Antag at $f \in C^\infty[-1,1]$, at $f^{(n)}(0) = 0$ for $n = 0,1,2,\ldots$ og at der eksisterer et C således at

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)| \le n!C$$

for alle $n = 1,2,3,\ldots$. Vis at f er konstant lig 0 på intervallet $[-1,1]$.[2]

6 Nu betragtes funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

fra Wade, opg. 4.3.3 på s. 101. I opgavens del (b) vises, at der gælder $f^{(n)}(0) = 0$ for alle højere ordens afledede. Hvad kan man konkludere om de afledede $f^{(n)}(t)$ for $t \in [-1,1]$?

Forelæsning:

kl. 10:30 – 12:00 i G5-112.

Mål og indhold:

Nyt emne: Integralregningen går tilbage til Newtons og Leibniz' arbejde i 1670'erne, men det var først i 1829 at Cauchy viste at *middelsummerne* for en *kontinuert* funktion f på et lukket interval $[a,b]$ konvergerer mod et fast tal, der betegnes $\int_a^b f(x)dx$.

Med udgangspunkt i dette indførte Riemann i 1854 et integralbegreb baseret på over-, under- og middelsummer, som gør det muligt at bevise de elementære egenskaber ved integralet som I har set i gymnasiet og/eller på basisåret.

Vi skal i forelæsningen gå i Riemanns fodspor og definere integralbegrebet med udgangspunkt i under- og oversummer. Herefter skal vi, som Cauchy, vise at en

[1] $|\xi| \le |x| \Rightarrow \cosh \xi \le \cosh x$! Tilsvarende for sinh.

[2] Se på bevismetoden i Sætning 2 fra noten. Vurder restledet $R_n^{f,0}(x)$ for $x_0 = 0, |x| < 1$.

kontinuert funktion på et lukket interval er Riemann-integrabel[3]. Slutteligt indfører vi middelsummer. Så er vi klar til at vise velkendte egenskaber ved integralet – næste gang.

Litteratur:

Wade Kap. 5.1–5.2, pp. 107 – 118.

Uniformt kontinuerte funktioner[4]

En reel funktion $f : I \to \mathbf{R}$ på et interval I kaldes *uniformt* kontinuert, hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ således at der gælder for $a, x \in I$:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Der kræves *mere* end i definitionen for kontinuitet idet man skal kunne vælge δ uafhængigt af a (og x).

Eksempel: Funktionen $f(x) = x$ er uniformt kontinuert[5] på $I = \mathbf{R}$.
Funktionen $g(x) = x^2$ er uniformt kontinuert på ethvert begrænset interval, men ikke på $\mathbf{R}$.
Funktionen $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}, h(x) = \tan x$ er ikke uniformt kontinuert.
Sætning.[6] Lad $I = [a, b]$ være et *lukket* interval, $a, b \in \mathbf{R}$. Så er enhver kontinuert funktion $f : I \to \mathbf{R}$ ligelig kontinuert.

Næste gang:

Torsdag, den 12.10., kl. 8:15 – 12:00. Der bliver en to ugers pause fordi jeg deltager i en konference i Californien.
Egenskaber af Riemann-integralet. Analysens hovedsætning (Hvad har integration og differentiation med hinanden at gøre?)
Wade, kap. 5.2 – 5.3, pp. 118 – 128.

[3] Vi benytter at en kontinuert funktion er uniformt kontinuerte der, se nederst
[4] Wade, s. 80/81
[5] Wade, Def. 3.35, s. 80
[6] Wade, Theorem 3.39, s. 81