## Repetition og Perspektivering:

kl. 8:15 – 8:40 i lokale G5-112.
Man kan beskrive legemet af de komplekse tal på mange forskellige måder, f.eks. ved

- at beskrive addition og multiplikation af tal på formen $z = a + ib, a, b \in \mathbf{R}$, og at checke at alle disse tal $z \neq 0 = 0 + i0$ har multiplikative inverse;

- ved at definere $\mathbf{C} = \mathbf{R}(i) = \mathbf{R}[X]/(X^2+1)$ som legemsudvidelse af de reelle tal ved hjælp af det irreducible polynomium $X^2+1$ ($i$ svarer så til restklassen af polynomiet $X$ modulo $X^2+1$; a+ib svarer til restklassen af polynomiet $a + bX$)

- ved at betragte reelle $2 \times 2$ matricer på formen $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ svarende til tallet $a + ib$. Specielt svarer tallet $i$ til en rotation $R$ med vinklen $\frac{\pi}{2}$; og $R^2$ til multiplikation med $-1$.

Fælles for alle beskrivelser er, at komplekse tal svarer enentydig til punkter i den reelle plan $\mathbf{R}^2$. Man kan altså betragte $\mathbf{C}$ som 2-dimensional vektorrum over de reelle tal $\mathbf{R}$, men også som 1-dimensional vektorrum over sig selv.
Hvilke $\mathbf{R}$ lineære afbildninger $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ givet ved $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (mht. til basis $\{1, i\}$) er også $\mathbf{C}$-lineære? Det gælder netop når $a = d$ og $c = -b$!

## 1. forelæsning:

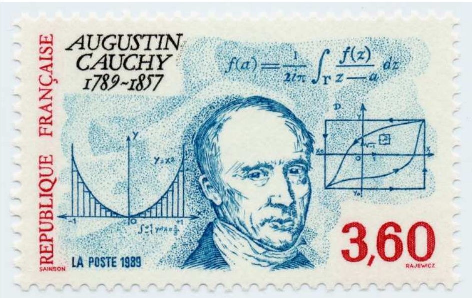
kl. 8:50 – 9:25 i lokale G5-112.

### Mål og indhold:

I kompleks funktionsteori beskæftiger man sig med funktioner $f : G \to \mathbf{C}, G \subseteq \mathbf{C}$ (og som regel $G$ åbent og sammenhængende). Lige som i det reelle tilfælde defineres kompleks differentiabilitet i et punkt som grænseværdi for differenskvotienter (men nu som kvotienter af komplekse tal!) Hvad betyder kompleks differentiabilitet af en funktion $f = u + iv$ (med realdel $u$ og imaginærdel $v$)? Man kan sige, at funktionen skal have en god approksimation ved en kompleks lineær afbilding $T$ – og det har den hvis

1. den tilsvarende reelle afbildning fra $G \subseteq \mathbf{R}^2$ ind i $\mathbf{R}^2$ er reell differentiabel (og dermed eksisterer de partielle afledede og en $2 \times 2$ Jacobi-matrix og hvis
2. denne Jacobi-matrix svarer til multiplikation med et komplekst tal; dette udtrykkes ved Cauchy-Riemann differentialligningerne (CR-DL).

Specielt er en funktion $f = u + iv : G \to \mathbf{C}$ holomorf (kompleks differentibel) i alle punkter i $G$ hvis $u, v : G \to \mathbf{C}$ er $C^1$-funktioner og hvis de opfylder (CR-DL).




### Litteratur:

**AJ** Jensen, *A short introduction to complex analysis*, ch. 2, pp. 1 – 4.

**Wikipedia** Holomorphic function

**Wikipedia** Cauchy-Riemann equations

## Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

RAUSSEN@MATH.AAU.DK — 9940 8855 — FREDRIK BAJERSVEJ 7G
HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN - 9220 AALBORG ØST

**Opgaver:**

**AJ, p. 8** 1 – 4[1]

**Harmonisk funktion** Givet funktionen $u : \mathbf{C} \to \mathbf{R}, u(x+iy) := 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$. For hvilke funktioner $v : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ er funktionen $u + iv$ kompleks differentiabel?

## 2. forelæsning

kl. 11.25 – 12:00 i lokale G5-112.

**Mål og indhold:**

Hvilke systematiske eksempler på holomorfe funktioner har man? Næst efter (komplekse) polynomier kan man betragte funktioner som er givet ved komplekse potensrækker. Sådan en potensrække (omkring et punkt $z_0$) konvergerer indenfor en åben cirkel hvis radius er lig med potensrækkens konvergensradius. En funktion $f : G \to \mathbf{C}$ kaldes analytisk hvis der for hvert $z_0 \in G$ findes en potensrække omkring $z_0$ som konvergerer mod $f$ inden for en cirkel i $G$.

For en sådan potensrække viser man, at den ledvist afledede potensrække har den samme konvergensradius. Derudover er funktionen som potensrækken konvergerer imod kompleks differentiabel med den ledvist afledede potensrække som den komplekse afledede. En analytisk funktion er dermed holomorf og endda $C^\infty$ (i kompleks forstand). Lige som for Taylorpolynomier og -rækker i reel forstand gælder der følgende sammenhæng mellem potensrækkens koefficienter og funktionens afledede:

$$a_k = f^{(k)}(z_0).$$

Nogle beviser vil formentlig blive udskudt til næste gang.

**Litteratur:**

**AJ** Jensen, *A short introduction to complex analysis*, ch. 2, pp. 4 – 8.

**Wikipedia** Analytic function

**Referencer:**

Arne Jensens noter har referencer til den tidligere brugte lærebog *An Introduction to Analysis* af W.R. Wade ([3] i noterne). Jeg vil løbende angive referencer til Fitzpatricks *Advanced Calculus* [PF] – eller somme tider andre kilder – som erstatning:

**p. 2, differentiationsregler** [PF], ch. 4.1, pp. 91 – 93.

**p. 2, reell differentiabilitet** $E(x - x_0, y - y_0)$ svarer til funktionen hvis grænseværdi betragtes i [PF], p. 374 (14.4). Samme henvisning (for differentiable funktioner, ikke kun $C^1$-funktioner) som i [PF] på p. 3.

**p. 4, kriterium for kompleks differentiabilitet** $fC^1 \Rightarrow f$ differentiabel: se [PF], Thm. 14.2 og lektionsplan for lektion 13 fra MAT1.

**p. 4, formel for konvergensradius** er ikke beskrevet ved lim sup i [PF] (eller Lisbeth Fajstrups kursus); det er kun vigtigt at man har forstået konceptet "konvergensradius".

**Software:**

Der findes forskellige applets der illustrerer vigtige komplekse funktioner, f.eks. :

- Complex maps
- A Complex Function Viewer
- Complex Function Grapher

[1] $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)), \sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$.

## Næste gang:

Fredag, den 26.2., kl. 8:15 – 12:00.
Bevis for $f$ analytisk $\Rightarrow$ $f$ holomorf. AJ, ch. 2.
Kurveintegraler i den komplekse plan AJ, ch. 3, pp. 8– 10.