Repetition og Perspektivering:

kl. 8:15 – 8:40 i lokale G5-112.
Holomorfe og analytiske funktioner.
Kompleks kurveintegration.

1. forelæsning:

kl. 8:50 – 9:25 i lokale G5-112.

Mål og indhold:

Mere om kurveintegraler: Vi fastslår at værdien af kurveintegralet for en C^1-funktion er uafhænging af kurvens parameterfremstilling (Theorem 3.11.). Ligesom for klassiske Riemann-integraler over intervaller kan man vurdere modulus af integralet opadtil ved funktionens værdier på kurven og ved længden af kurven.

Integraler og stamfunktioner hører sammen, også for komplekse funktioner: For en kompleks funktion f på et område (åben og sammenhængende) $G \subseteq \mathbf{C}$ gælder: f har en stamfunktion på G hvis og kun hvis kurveintegralet over alle (polygonale) lukkede kurver giver 0 (Theorem 3.16 og 3.17).

Hvis man checker kriteriet for funktionen $f(z) = z^n$ på $G = \mathbf{C}$ ($n \geq 0$), hhv. $G = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ ($n < 0$) ved integration over cirkler om Origo fås helt forskellige resultater for $n \neq -1$ på den ene side og for $n = -1$ på den anden side. Hvad betyder det mon for en kompleks logaritmefunktion?

Litteratur:

AJ Jensen, *A short introduction to complex analysis*, ch. 3, pp. 10 – 13.

Wikipedia Line integral

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

AJ, p. 13 Opgave 2 – 4.

- Givet en potensrække $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ som konvergerer i cirkelskiven $B(0,r)$. Vis at $\oint_\gamma f(z) = 0$ for enhver lukket kurve γ i $B(0,r)$.

2. forelæsning

kl. 11.25 – 12:00 i lokale G5-112.

Mål og indhold:

Kompleks funktionsteori tager for alvor fart med Cauchys integralsætning. Den siger at kurveintegralet for en holomorf funktion på et stjerneformet område (Definition 4.1; generaliserer konveks) over en lukket kurve altid giver 0 – og at dette faktisk karakteriserer de holomorfe funktioner! (Corollary 4.5).

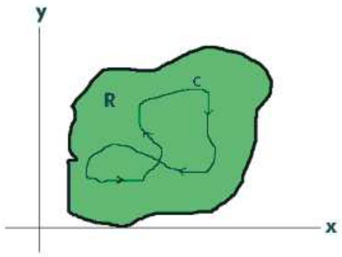

Fig. 2

Først bevises sætningen i et specielt tilfælde, Goursats lemma. Her er kurven randen af en trekant som er indeholdt i definitionsområdet. Trekanten inddeles i mindre og mindre deltrekanter, og det vises at deres bidrag til det hele i sidste ende ikke kan blive til mere end 0! Fra Goursats lemma følger først Cauchys integralsætning for integraler langs polygonkurver og så, ved at bruge karakterisering af holomorfi ved stamfunktioner, langs generelle lukkede kurver.

Litteratur:

AJ Jensen, *A short introduction to complex analysis*, ch. 4, pp. 14 – 17.

Wikipedia Cauchy's integral theorem

Næste gang:

Fredag, den 9.4., kl. 8:15 – 12:00.
Cauchys integralformel.
Holomorfe funktioner er analytiske.
AJ, ch. 4 – 5, pp. 16 – 20.

Supplerende note:

Hvorfor gælder: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n \neq \emptyset$ i beviset for Goursats lemma ([AJ], p. 15)?

Her kan man enten bruge en generel sætning for kompakte metriske rum, som ligger ind i hinanden, som i [AJ]. Man kan også tilpasse beviset for intervalrusesætningen fra MAT 1. Eller man kan argumentere direkte med Cauchyfølger på følgende måde:

Valg i hver trekant et element $z_n \in \Delta_n$. Da $z_{n+1} \in \Delta_{n+1} \subset \Delta_n$ gælder:
$|z_{n+1} - z_n| \leq diam\Delta_n \leq \frac{1}{2}L_{\partial\Delta_n} = \frac{1}{2^{n+1}}L_{\partial\Delta}$; og med trekantsuligheden:
$|z_{n+k} - z_n| \leq \frac{1}{2^n}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k})diam\Delta \leq \frac{1}{2^n}L_{\partial\Delta}$.
Derfor er følgen z_n en Cauchyfølge. Grænseværdien z_0 ligger i enhver af de lukkede(!) trekanter Δ_n og derfor også i deres snitmængde $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. $\square$