Matematisk Analyse II 14. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

9.4.2010

Umiddelbare konsekvenser

Theorem (Cauchys integralsætning)

Givet en holomorf funktion $f : G \to \mathbf{C}$ på et stjerneformet definitionsområde G.
Så er integralet langs med enhver lukket polygonkurve~~polygon~~kurve γ i G
$\oint_\gamma f(z)dz = 0$.

Under disse forudsætninger har den holomorfe funktion f en (holomorf) stamfunktion $F : G \to \mathbf{C}$.

Cauchys integralformel

Theorem (Cauchys integralformel)

Givet en holomorf funktion $f : G \longrightarrow \mathbf{C}$ på en åben delmængde $G \subseteq \mathbf{C}$, et punkt $a \in G$, et positivt tal r således at $\bar{B}(a, r) \subset G$. For ethvert $z_0 \in B(a, r)$ gælder:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(a,r)} \frac{f(z}{z - z_0} \, dz.$$

Funktionsværdier i det indre af $B(a, r)$ bestemmes af værdier på randcirklen $\partial B(a, r)$!! Specielt:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Theorem

Givet en funktion $f : G \to \mathbf{C}$ på en åben delmængde $G \subset \mathbf{C}$ som er holomorf i $a \in G$.
Vælg $\rho > 0$ maximal med $B(a, \rho) \subseteq G$.
Funktionen f er uendelig mange gange kompleks differentiabel i alle punkter $z \in B(a, \rho)$. Der gælder:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n.$$

- $F : G \to \mathbf{C}$ holomorf $\Rightarrow$ F' holomorf.

Moreras sætning Givet en kontinuert funktion $f : G \to \mathbf{C}$ på en åben mængde G således at $\oint_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ for enhver trekant $\Delta \subset G$.
Så er f holomorf.