# Matematisk Analyse II 15. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

14.4.2010

# Generalisering af Cauchys integralformel

## Theorem (Cauchys integralformel)

*Givet en **holomorf** funktion $f : G \to \mathbf{C}$ på en åben delmængde $G \subseteq \mathbf{C}$, et punkt $a \in G$, et positivt tal $r$ således at $\bar{B}(a, r) \subset G$. For ethvert $z_0 \in B(a, r)$ gælder:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

# Liouvilles sætning. Algebraens fundamentalsætning

**Theorem (Liouvilles sætning)**

*En begrænset hel funktion (holomorf og defineret på den komplekse plan* $\mathbf{C}$*) er konstant!*

**Theorem (Algebraens fundamentalsætning)**

*Et polynomium* $p(z) \in \mathbf{C}[X]$ *med grad* $\deg p \geq 1$ *har en kompleks rod* $z_0 \in \mathbf{C}$: $p(z_0) = 0$.

# Rødder og deres orden

**Theorem**

*Givet en holomorf funktion $f : G \to \mathbf{C}$ på et område $G$ med rod $f(a) = 0,\ a \in G$. Så gælder enten:*

1. $f^{(n)}(a) = 0$ *for alle* $n$*: Så gælder* $f \equiv 0$.
2. $a$ *har orden* $n$*, dvs.,* $f^{(k)}(a) = 0, k < n, f^{(n)}(a) \neq 0$.
   *Så findes der en faktorisering* $f(z) = (z-a)^n g(z)$ *med en holomorf funktion* $g : G \to \mathbf{C}$, $g(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0$.

# Rødder og identitetssætning

## Definition

$f : G \to \mathbf{C}$ holomorf. Rødderne danner
$Z(f) := \{z \in G |\ f(z) = 0\}$.

## Theorem

*Om $Z(f)$ gælder netop en af følgende 3 påstande:*

1. $Z(f) = \emptyset$ *– ingen rødder. fx.* $f(z) = \exp(z)$*;*
2. $Z(f) = G$ *–* $f \equiv 0$*;*
3. $Z(f)$ *består af **højst tællelig mange** isolerede punkter.*

## Theorem (Identitetssætning)

*Givet to holomorfe funktioner* $f, g : G \to \mathbf{C}$*. Hvis mængden* $\{z \in G |\ f(z) = g(z)\}$ *har et **fortætningspunkt i $G$**, så gælder:* $f \equiv g$*.*