Matematisk Analyse II 16. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

16.4.2010

Definition

Givet en funktion $f : G \setminus \{a\} \to \mathbf{C}$, $a \in G$ på et udprikket område med **singularitet** i G. Singulariteten kaldes

- **hævelig** hvis der findes en holomorf udvidelse af f i a;
- **pol af orden m** hvis $\lim_{z \to a}(z-a)^m f(z)$ eksisterer og er forskellig fra 0;
- **væsentlig** hvis $\lim_{z \to a}(z-a)^m f(z)$ ikke eksisterer for noget m.

Theorem

*En singularitet a for den holomorfe funktion f er hævelig $\Leftrightarrow$ f er **begrænset** på en udprikket kugle $B(a, r) \setminus \{a\} \subset G$.*

Poler og meromorfe funktioner

Hvis f har en pol af orden m i a, så kan f i en åben omegn beskrives ved en (endelig) Laurentrække

$$f(z) = c_m(z-a)^{-m} + \cdots + c_1(z-a)^{-1} + \varphi(z),$$

hvor $\varphi(z)$ er en potensrække som konvergerer i omegnen (en holomorf funktion).

hoveddel $g(z) = c_m(z-a)^{-m} + \cdots + c_1(z-a)^{-1}, z \neq a$;

residuum $Res(f, a) = c_1$.

Definition

Givet et område $G \subseteq \mathbf{C}$ og en isoleret delmængde $P \subset \mathbf{C}$. En holomorf funktion $f : G \setminus P \to \mathbf{C}$ således at alle $z \in P$ er hævelige singulariteter eller poler kaldes *meromorf*.

Meromorfe funktioner = kvotienter af holomorfe funktioner $f = g/h$.

Integralform for residuum. Omløbstal

Theorem

Givet en meromorf funktion $f : G \setminus P \to \mathbf{C}$, $a \in P$. For $r > 0$ med $\bar{B}(a, r) \subseteq G$ og $P \cap \bar{B}(a, r) = \{a\}$ gælder:

$$Res(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(a,r)} f(z)dz$$

.

Definition

For en lukket kurve γ og $z_0 \notin \gamma^*$ kaldes $ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$ kurvens omløbstal omkring z_0.

Omløbstallet er altid et hele tal.