1 Middelværdi og varians

1. Lad X være en stokastisk variabel, der kan antage værdier -1, 0 og 1. Beregn middelværdi $\mathbb{E}X$ og varians $\mathbb{V}\text{ar}X$ når
   (a) $P(X = -1) = P(X = 1) = 1/4$ og $P(X = 0) = 1/2$.
   (b) $P(X = -1) = 18/20$ og $P(X = 0) = P(X = 1)$ [vink: start med at bestemme $P(X = 0)$ og $P(X = 1)$].
   (c) Giver resultaterne vedr. middelværdi og varians i de to tilfælde intuitiv mening ?

2. Antag $X_1, \ldots, X_{10}$ er uafhængige med ens middelværdi 1 og varians 2.
   (a) Hvad er middelværdien og variansen af summen $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$?
   (b) Hvad er middelværdien og variansen af gennemsnittet $\bar{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$?
   (c) Hvis vi erstatter antallet 10 med n, hvad skal n så være for at variansen af $\bar{X}$ bliver mindre end 0.1 ?

2 Binomialfordeling

1. Antag X er binomialfordelt $b(20, 0.9)$.
   (a) Hvilke værdier kan X antage ?
   (b) Hvad er middelværdien $\mathbb{E}X$ og variansen $\mathbb{V}\text{ar}X$?
   (c) Hvad er sandsynlighederne for at $X \leq 2$ og $X \geq 17$? (brug gerne `R`)

2. I en produktion af 500 elpærer angiver X antallet af defekte. Det antages at status (defekt/ikke-defekt) er uafhængige for elpærerne.
   (a) Hvad er fordelingen for X ?
   (b) Lad p angive sandsynligheden for at en pære er defekt. Hvordan estimeres p ?
   (c) Hvad er variansen af $X/500$?
   (d) Hvad er standardafvigelsen af $X/500$?

(e) Hvis det observeres, at $X = 11$ pærer er defekte, hvad bliver så det konkrete estimat for p ?

(f) Beregn et 95% konfidensinterval for p når det observeres, at 11 er defekte (estimatet af p antages at være normalfordelt)

3 Normalfordeling

1. Lad X være normalfordelt med middelværdi 1 og varians 1.

   (a) Hvad er sandsynligheden for at X er mindre end -2 ? [vink: tæl standardafvigelser]

   (b) Angiv et interval, som X vil tilhøre med 99.99% sandsynlighed.

2. Lad X være normalfordelt og antag, at der er 2.5% sandsynlighed for at X er mindre end -1 og 2.5% sandsynlighed for at X er større end 3. Hvad er da middelværdien og variansen for X ?

4 Monte Carlo

1. En Poisson fordelt stokatisk variabel X med middelværdi μ kan antage værdierne $0, 1, 2, \ldots$ og har sandsynlighedsfunktion

$$P(X = m) = \exp(-\mu)\frac{\mu^m}{m!}.$$

   (a) Antag $\mu = 3$. Beregn $P(X = 0)$, $P(X = 1$ og $P(X = 2)$.

   (b) Simuler 10000 udfald af X [`x=rpois(10000,5)`].

   (c) Passer de observerede andele 0, 1 og 2'er med de beregnede sandsynligheder ? [benyt `I=as.numeric(x==0)` etc.]

   (d) Ifølge teorien for en Poisson fordeling er variansen for X lig med middelværdien for X. Estimer variansen for X udfra den generede stikprøve. Passer resultatet med teorien ?

   (e) Der gælder generelt, at $\mathbb{V}\text{ar}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$ for en stokastisk variabel X. Dermed fås for en Poisson fordelt stokastisk variabel, at $\mathbb{E}X^2 = \mu + \mu^2$ og altså $\mathbb{E}X^2 = 12$ når $\mu = 3$.

$\mathbb{E}X^2$ er altså kendt, men prøv for øvelsens skyld også at estimere $\mathbb{E}X^2$ vha. af den simulerede stikprøve og angiv et 95% konfidensinterval for estimatet [brug `z=x^2` og beregn den empiriske middelværdi af `z`]