Produkt og marked - matematiske og statistiske metoder

Rasmus Waagepetersen
Institut for Matematiske Fag Aalborg Universitet

February 8, 2021

Kursusindhold:

- Sandsynlighedsregning og lagerstyring
- Normalfordelingen og Monte Carlo-metoder

Monte Carlo

Antag vi gerne vil beregne sandsynligheden for at et kast med 5 terninger giver mindst 15 i alt.

Er vi ikke i stand til at beregne denne sandsynlighed teoretisk, kan vi i princippet kaste 5 terninger et stort antal gange og udregne andelen af kastene, hvor summen af terningernes øjne giver 15 eller derover. Denne andel vil være et estimat af den ønskede sandsynlighed.

I praksis lader vi en computer foretage kastene vha. computer-genererede tilfældige tal.

Estimat af $P(X \geq m)$: Lad $I_i = 1[X_i \geq m]$

$$P(X \geq m) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_i = \bar{I}$$

Eksempel: hvis vi bruger $n = 1000$ simulationer af kast med 5 terninger fås estimat 0.775. Men kun estimat - hvis vi tager 1000 nye kast fås andet resultat - f.eks. 0.795.

Dvs. der er en vis usikkerhed på Monte Carlo estimatet.

Usikkerheden bliver mindre jo større n, der benyttes.

Basal statistik - empirisk middelværdi og varians

Observationer $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (kan være "syntetiske" - genereret på computer) - alle samme fordeling som X.

Empirisk middelværdi og empirisk varians

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

('empirisk middelværdi af kvadrerede afvigelser')

Empirisk spredning:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

Når n meget stor vil $\bar{X}$ blive nøjagtig tilnærmelse af $\mu = \mathbb{E}X$ og s^2 vil tilnærme sig *variansen* af X:

$$\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}X = \mathbb{E}(X - \mu)^2$$

Varians: forventede værdi af den kvadrerede afvigelse fra middelværdien.

Spredning:

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}X}$$

(samme enhed som X)

Udregning af varians

Antag X kan antage værdierne $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, M$ med sandsynligheder $p(m) = P(X = m)$.

$$\mathbb{V}\mathrm{ar} X = \sum_{m=0}^{M} p(m)(m-\mu)^2 =$$

$$p(0)(0-\mu)^2 + p(1)(1-\mu)^2 + \cdots + p(M)(M-\mu)^2$$

Eksempel: varians af binomialfordeling $S \sim b(1, p)$ med $\mu = p$.

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(X-\mu)^2 = (1-p)(0-p)^2 + p(1-p)^2 = p(1-p)$$

Regneregel for varians:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar} aX = a^2 \mathbb{V}\mathrm{ar} X$$

Hvis X og Y uafhængige:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X + Y] = \mathbb{V}\mathrm{ar} X + \mathbb{V}\mathrm{ar} Y$$

Spredning af aX:

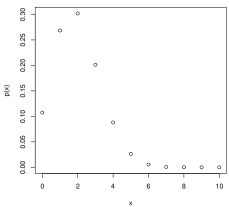
$$\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar} aX} = a\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar} X}$$

Eksempel: varians af binomialfordeling $X = \sum_{i=1}^{n} S_i \sim b(n, p)$ ($S_i \sim b(1, p)$ og uafh.)

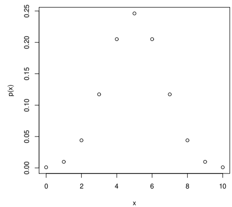
$$\mathbb{V}\mathrm{ar} X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar} S_i = np(1 - p)$$

Binomial-fordelinger med forskellige varianser

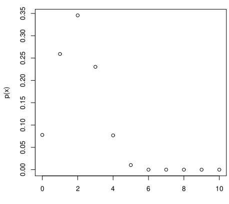
$b(10, 0.2)$



$b(10, 0.5)$



$b(5, 0.5)$



Varianser: 1.6, 2.5 og 1.25

Varians for Poisson

Poisson fordeling med middelværdi μ fremkommer som grænseværdi af $b(n, \mu/n)$.

Varians for $X \sim b(n, \mu/n)$:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}X = n\frac{\mu}{n}(1 - \frac{\mu}{n}) = \mu\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)$$

Dvs. variansen for X går mod μ når n går mod uendelig.

Konklusion: variansen for $Poisson(\mu)$ er $\mathbb{V}\mathrm{ar}X = \mu = \mathbb{E}X$!

Kontinuerte stokastiske variable

Hidtil har vi set på *diskrete* stokastiske variable, som antog heltallige værdier.

En *kontinuert* stokastisk variabel kan antage alle reelle værdier.

For en kontinuert stokastisk variabel angives sandsynligheder vha. en funktion f defineret på de reelle tal. Stor/lille sandsynlighed for at X falder i intervaller hvor f er stor/lille.

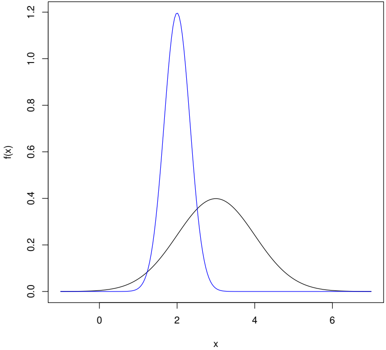
Eksempel: uniform (ensartet) fordeling på $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Normal fordeling

Normalfordeling med middelværdi μ og varians σ^2: f klokkeformet

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2)$$



Middelværdi 3 eller 2 og spredning 1 eller 1/3.

Normalfordeling specificeret ud fra middelværdi μ og varians σ^2 !

(vi skal ikke til at beregne μ og σ^2)

Normalfordeling - 2 slags intervaller

For en normalfordeling $N(\mu, \sigma^2)$ har vi altid

$$P(\mu - \sigma 1.96 \leq X \leq \mu + \sigma 1.96) = 0.95$$

Sagt i ord: med 95% sandsynlighed afviger en normalfordelt stokastisk variabel ikke mere end to standardafvigelser ($1.96\sigma \approx 2\sigma$) fra middelværdien.

Dette er ækvivalent med, at med 95% sandsynlighed ligger μ i det tilfældige interval $[X - 1.96\sigma; X + 1.96\sigma]$.

Sagt på en tredje måde: forskellen $|X - \mu|$ er mindre end 1.96σ med 95% sandsynlighed.

2σ: 95,4% 3σ: 99,7% 4σ: 99,99%

Centrale grænseværdi-sætning

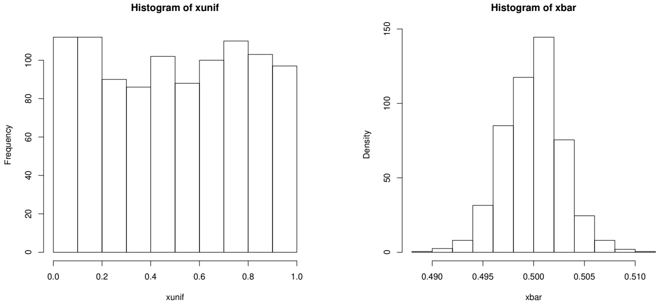
Middelværdi for $\bar{X}$ er μ. Variansen er σ^2/n

CLT: når n stor vil $\bar{X}$ tilnærmelsesvist have en *normal*-fordeling (med middelværdi μ og varians σ^2/n).

NB: ligegyldigt hvilken fordeling X_i'erne har fås samme grænse-fordeling af $\bar{X}$ når $n \to \infty$ (dog skal X_i'erne være ens fordelt og uafhængige).

Tilnærmelsesvis normal fordeling af gennemsnit af uniformt fordelte variable

Histogram af uniformt fordelte variable samt histogram af $\bar{X}$ (gennemsnit af 1000 uniformt fordelte)



Intervaller for Monte Carlo estimater - vurdering af usikkerhed

Estimat $\bar{X}$ tilnærmelsesvist $N(\mu, \sigma^2/n)$.

Dvs. med 95% sandsynlighed er estimations-fejlen

$$|\mu - \bar{X}|$$

mindre end $1.96\sigma/\sqrt{n}$.

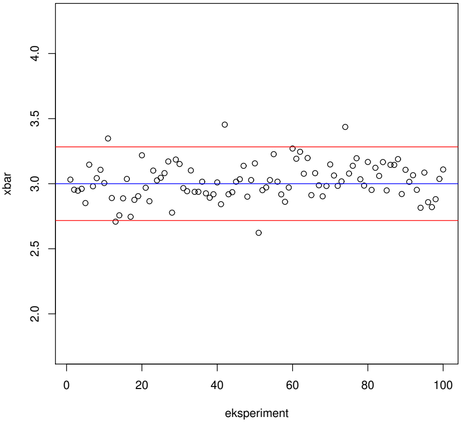
Dette er ækvivalent med, at med 95% sandsynlighed ligger μ i det tilfældige interval $[\bar{X} - \sigma 1.96/\sqrt{n}, \bar{X} + \sigma 1.96/\sqrt{n}]$.

Intervallet giver et bud på usikkerheden af estimationen af μ - kaldes *konfidens*-intervallet.

I praksis erstattes ukendte σ af $s = \sqrt{s^2}$ - den empiriske spredning.

Simulerede $\bar{X}$

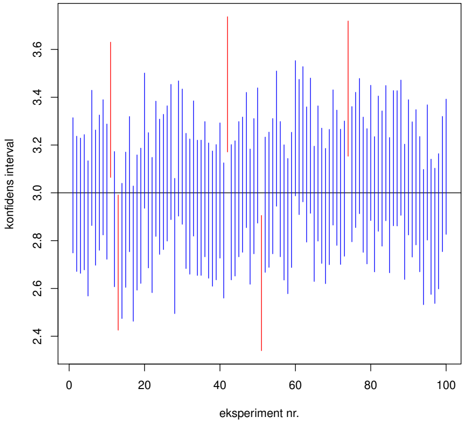
(hver $\bar{X}$ gennemsnit af 100 normalfordelte variable med middelværdi 3 og varians 2)



Ca. 5% af de simulerede $\bar{X}$ ligger udenfor 95%-intervallet.

Simulerede konfidensintervaller

(hver baseret på $\bar{X}$ gennemsnit af 100 normalfordelte variable med middelværdi 3 og varians 2)



Konfidensintervallerne indeholder sande middelværdi $\mu = 3$ i ca. 95% af tilfældende.

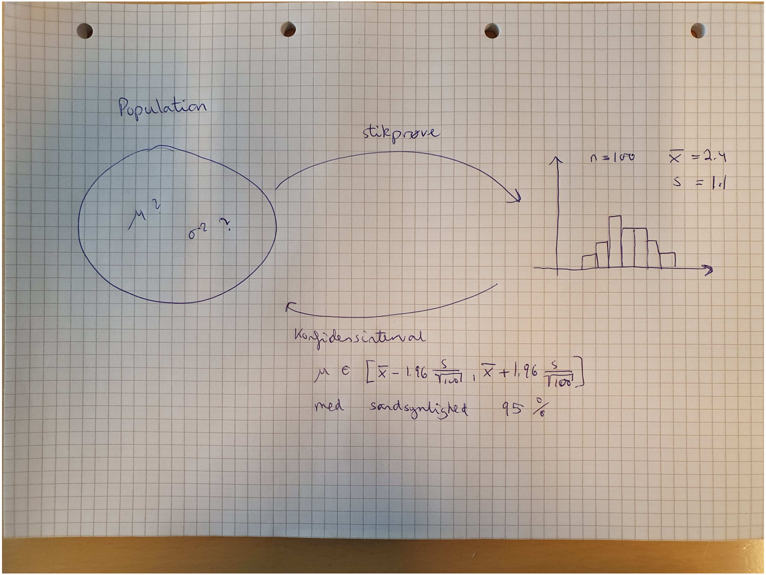
Praktisk brug af konfidensinterval

Hvis vi for et givet eksperiment/datasæt/Monte Carlo beregning hævder, at den ukendte middelværdi ligger i det beregnede interval, så tager vi kun fejl i 5% af tilfældende, hvis der er tale om et 95% interval.

Hvis vi vil have større sikkerhed kan vi i beregningen af konfidensintervallet erstatte 1.96σ med 3σ eller 4σ - giver 99.7% eller 99.99% intervaller.

Da tager vi kun fejl i 0.3% eller 0.01% af tilfældene.

Population og stikprøve



Tilbage til Monte Carlo

Med tusind (computer) kast af 5 terninger får vi estimeret forventet total antal øjne 17.49 og estimeret varians 13.91.

Estimaterne for μ og σ^2/n er 17.49 og $13.91/1000 = 0.0139$. Den estimerede spredning for $\bar{X}$ er $\sqrt{0.0139} = 0.11$.

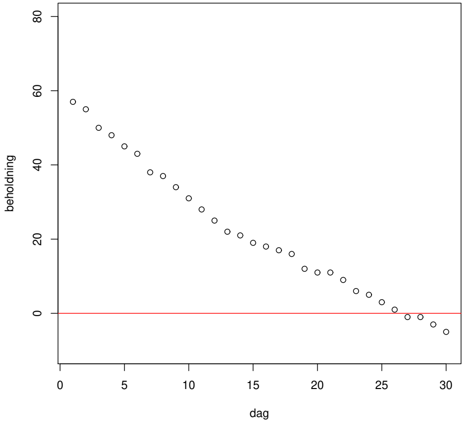
NB: hvad er den sande forventede værdi ?

Bud på usikkerheden: trolige værdier af μ er $[17.49 - 2 \times 0.11, 17.49 + 2 \times 0.11]$.

Estimation af sandsynlighed for mere end eller lig 15: her benytter vi variable $I_i = 1[\text{total sum}_i \geq 15]$. Empirisk middelværdi og varians 0.778 og 0.17. Dvs. estimeret spredning på $\bar{I}$ er $\sqrt{0.17/1000} = 0.013$. Dvs. vurdering af usikkerhed: sandsynlighed mellem 0.778-0.026 og 0.778+0.026.

Lager: V ventetid til lager tømmes. Empirisk middelværdi 28.33 og varians 4.42. Antal simulationer=1000. Dvs. sande forventede ventetid $28.33 \pm 2 \times 0.066$.

En simulation af lager



I dette tilfælde gik der 26 dage før lageret blev tømt.

Øvelser

1. Beregn varianserne af de stokastiske variable fra opgave 1, 2, 6 og 7 i første sæt af opgaver.
2. Udgangspunktet er følgende 10 observationer (uafhængige, samme middelværdi og varians):
   3.10 1.84 1.66 1.44 1.26 2.63 2.93 3.61 0.36 2.45
   2.1 Beregn empirisk middelværdi $\bar{x}$ og varians s^2.
   2.2 Beregn et 95% konfidensinterval for den ukendte (teoretiske) middelværdi μ.
   2.3 Hvor stor skulle stikprøven være, hvis intervallets bredde skulle være mindre end en halv ?
3. Antag X er normalfordelt med middelværdi 3 og varians 2.
   3.1 Hvad er sandsynligheden for, at X er mindre end 3 ?
   3.2 Angiv et interval, som X tilhører med 95% sandsynlighed.

4. Antag $X_1, \ldots, X_{50}$ er uafhængige og alle har middelværdi 3 og varians 2.
   4.1 Angiv et interval, som $\bar{X}$ tilhører med sandsynlighed 95%.
   4.2 Angiv et (tilfældigt) interval, som med sandsynlighed 95% vil indeholde den sande middelværdi 3.
5. Antag $X = (X_1 + \cdots + X_{100}) \sim b(100, 0.25)$ og lad $\bar{X} = X/100$.
   5.1 Hvordan kan vi udregne en tilnærmet værdi for $P(\bar{X} \leq 0.1)$ vha. den centrale grænseværdi-sætning ?
   5.2 Antag, at p er ukendt men vi har observeret $\bar{X} = 0.65$. Angiv da et 95% konfidensinterval for p (vink: husk variansen for $b(n, p)$ er $np(1 - p)$).

6. Antag, at en fabriks produktion af bolte skal leve op til følgende specifikationer: middelværdien af boltenes længde skal være 10 mm og der skal være mindst 99.7% sandsynlighed for, at en bolts længde er i intervallet 9.85 til 10.15 mm. En ingeniør måler nu 100 bolte og observerer, at den empiriske middelværdi $\bar{X}$ og varians s^2 for de målte bolte er henholdsvis 9.91 og 0.000289.
   6.1 Taler ingeniørens data imod, at den sande middelværdi er 10 ? (vink: beregn konfidensinterval)
   6.2 Antag, at boltenes længder er normalfordelte. Giver data anledning til at tro, at de producerede bolte med 99.7% sandsynlighed overholder specifikationens tolerance-interval ?
7. En produktion af elektriske komponenter skal overholde, at i snit er højst 0.5% af komponenterne defekte. I en stikprøve af 1000 komponenter er 7 komponenter defekte. Det antages, at komponenternes fejlstatus er uafhængige. Giver de observerede data anledning til at mene, at kravet til produktionen ikke er overholdt ? (vink: udregn 95% konfidensinterval for den ukendte andel defekte)

8. (Monte Carlo beregning af sandsynlighed). Brug computer til at estimere sandsynligheden for, at det maksimale antal øjne i et kast med 5 terninger er mindre end eller lig 5. Beregningens nøjagtighed skal opfylde, at 99.7% konfidensintervallet for sandsynligheden har bredde højst 0.02.

   Vink: modificer min kode for terningkast. Beregning af max-værdi i en vektor `x`:

   ```
   > xmax=max(x)
   ```

   Kan I udregne sandsynligheden eksakt ?

Facit

1: 0.96, 3, 0.5625, 3.6, 2.1: 2.13 0.98, 2.2: [1.52;2.74], 2.3: 60, 3.1: 0.5, 3.2: 3±2.77, 4.1: 3 ± 0.392, 4.2: $\bar{X}$±0.392, 5.1 : $\bar{X}$ er approksimativt $N(0.25, 0.001875)$. 5.2: Varians σ^2 for X_i estimeres til $0.65(1-0.65) = 0.2275$. Konfidensinterval: $0.65 \pm 1.96\sqrt{0.2275/100} = 0.65 \pm 0.093$. 6.1: ja, 99.7% konfidensintervallet er $[9.9049, 9.9151]$ 6.2: ja, på baggrund af $\bar{X}$ og s^2 er det estimerede 99.7% interval $[9.859, 9.961]$. 7: nej, 95% konfidensintervallet er $[0.0017, 0.0123]$. 8: med 100000 simulationer beregner jeg sandsynligheden til 0.3999 med et 99.7% konfidensinterval $[0.3952, 0.04045]$, som har bredde 0.0092 (husk, disse beregninger er behæftet med Monte Carlo fejl, da de er beregnet på baggrund af simulationer).