Opgaver til lektion 4

(NB opg ej i rækkefølge!)

Opg 5

a) $E[\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2] = \alpha EX_1 + (1-\alpha)EX_2$

$= \alpha\mu + (1-\alpha)\mu = \mu(\alpha + 1 - \alpha) = \mu.$

b) $Var[\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2] = \alpha^2 Var X_1 + (1-\alpha)^2 Var X_2$

$= \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2$

Finder min ved at differentiere mht α og sætte afledte lig nul:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2\right) = 2\alpha\sigma_1^2 + 2(1-\alpha)(-1)\sigma_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha\sigma_1^2 + 2(\alpha-1)\sigma_2^2 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha\sigma_1^2 + 2\alpha\sigma_2^2 - 2\sigma_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \sigma_2^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Sættes $P_1 = \alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ og $P_2 = (1-\alpha) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

ses vægtrelationen at være opfyldt:

$$P_1\sigma_1^2 = P_2\sigma_2^2 \Leftrightarrow \frac{\sigma_2^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Bemærk $\quad p_1 = \dfrac{\sigma_2^2 \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}} = \dfrac{\frac{1}{\sigma_1^2}}{\frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_1^2}}$

Dvs p_1 er omvendt proportional med σ_1^2.

$\boxed{\text{Opg 1}}$

$\sigma_1^2 = 4 \qquad \sigma_2^2 = 8$

$p_1 = \frac{1}{4} \qquad p_2 = \frac{1}{8}$

$$\bar{X}^* = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} 10 + \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} 14 = \frac{2}{2+1} 10 + \frac{1}{2+1} 14$$

$$= \frac{2}{3} 10 + \frac{1}{3} 14 = 11\frac{1}{3}.$$

Varians på $\bar{X}^*$: $\qquad \sigma_0^2 = p_1 \sigma_1^2 = p_2 \sigma_2^2 = 1$

$$\operatorname{Var} \bar{X}^* = \frac{\sigma_0^2}{p_1 + p_2} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{32}{12} = \underline{\underline{2\frac{2}{3}}}$$

Opg 4

a) $E[X_{i1} + X_{i2}] = EX_{i1} + EX_{i2} = \mu_i - \mu_i = 0$

$$Var[X_{i1} + X_{i2}] = Var X_{i1} + Var X_{i2} = l_1 \sigma_k^2 + l_1 \sigma_k^2$$
$$= 2 l_1 \sigma_k^2$$

Dermed $Var \frac{1}{\sqrt{2l_1}}[X_{i1} + X_{i2}] = \frac{1}{2l_1} Var[X_{i1} + X_{i2}]$

$$= \sigma_k^2 .$$

b)

Lad $Y_i = \frac{1}{\sqrt{2l_i}}[X_{i1} + X_{i2}]$

Jf a) har Y_i'erne ens middelværdi 0

og varians σ_k^2.

Dvs σ_k^2 kan estimeres ved

$$s_Y^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} (y_i - 0)^2 = 29.8954$$

$$s_k = \sqrt{29.8954} = \underline{\underline{5.4677}}$$

(Husk: længder l_i skal omregnes til km) c)

Højdeforskellen H kan estimeres ved

$$H_1 = \sum_{i=1}^{n} X_{i1} \quad \text{og} \quad H_2 = -\sum_{i=1}^{n} X_{i2}$$

Både H_1 og H_2 har varians

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \sigma_k^2 = \sigma_k^2 \, l \quad \text{hvor} \quad l = \sum_{i=1}^{n} l_i$$

Dvs vi kan estimere H ved gennemsnittet

$\frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ som har varians $\frac{1}{2} \sigma_k^2 \, l$

$\frac{1}{2}(h_1 + h_2) = 957.5$ og $l = 5.836$ km

Estimeres σ_k ved $5.47 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$ fås

95% konfidensintervallet

$$957.5 \pm 1.96 \cdot 5.47 \cdot \sqrt{5.836} = \underline{\underline{[931.60 \,;\, 983.40]}}$$

Opgave 2

$$r_v = 200 - 55.4 - 105.3 - 39.7 = -0.4$$

Dvs α estimeres ved $55.4 + \frac{-0.4}{3} = \underline{\underline{55.27}}$

$\beta: 105.3 - \frac{0.4}{3} = 105.17$ $\quad \gamma: 39.7 - \frac{0.4}{3} = 39.57$

Opgave 3

a) Vægtene vælges omvendt proportionalt til længderne af strækningerne l_1 og l_2

$p_1 = \frac{1}{0.861}$ $\qquad p_2 = \frac{1}{0.624}$ (regner i km)

$$\mu_p = \frac{p_1}{p_1 + p_2}(7845 + 92) + \frac{p_2}{p_1 + p_2}(8157 - 217)$$

$$= \underline{\underline{7938,739}}$$

b) Slutfejl $r = 8157 - 7845 - (92 + 217) = 3$

Fordeles r prop. med strækningslængderne

fås $\mu_p = (7845 + 92) + \frac{0.861}{0.861 + 0.624} 3 = \underline{\underline{7938.739}}$

(dvs blot en anden måde at udregne μ_p)

Sidste alternativ $\mu_p = (8157 - 217) + \frac{0.624}{0.861 + 0.624} 3 = 7938,739$

c) $\sigma_k = 2\,mm/\sqrt{km}$

Dermed er variansene hørende til $\mu_1 + H_1$ og $\mu_2 + H_2$ gitt ved

$$\sigma_1^2 = 0.861 \cdot 4 = 3.444 \quad og \quad \sigma_2^2 = 0.624 \cdot 4 = 2.496$$

og $$\sigma_0^2 = \frac{1}{0.861} \cdot 0.861 \cdot 4 = \frac{1}{0.624} \cdot 0.624 \cdot 4 = 4 = \sigma_k^2$$

Dermed er variansen på estimatet for μ_p

$$\frac{\sigma_0^2}{P_1 + P_2} = \underline{\underline{1.447}}$$

d)

$$P_1 = \frac{1}{0.861} \qquad P_2 = \frac{1}{0.624} \qquad P_3 = \frac{1}{0.763}$$

$$\bar{X}^* = \frac{1}{P_1 + P_2 + P_3}\Big[P_1[7845 + 92] + P_2(8157 - 217) + P_3(7597 + 342)\Big] = \underline{\underline{7938.823}}$$