
Opgaver til lektion 2

Opgave 1

- a) Lad X være en kontinuert stokastisk variabel, der angiver målingen af en længde, og antag $X \sim \mathcal{N}(10, 0.04)$. Bestem a således, at

$$P(10 - a < X < 10 + a) = 0.95$$

- b) Antag, at Y er en stokastisk variabel med samme fordeling som X , samt at X og Y er uafhængige. Bestem den forventede værdi og variansen af $(X + Y)/2$. Hvilken fordeling følger $(X + Y)/2$?
- c) Bestem b således, at

$$P(10 - b < \frac{X + Y}{2} < 10 + b) = 0.95$$

Sammenlign a og b og fortolk forskellen.

Opgave 2

Antag at X og Y er to uafhængige stokastiske variable med samme varians σ^2 . Lad de stokastiske variable U og W være givet ved $U = X + Y$ og $W = X - X$. Bestem variansen for U og W samt for $U/2$ og $W/2$. Kommenter resultaterne.

Opgave 3

Vi måler en størrelse fem gange, og observerer hermed fem stokastiske variable X_1, X_2, \dots, X_5 , som antages at være uafhængige identiske normalfordelte

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, 5.$$

Følgende data observeres:

$$x_1 = 1,1 \quad x_2 = 0,9 \quad x_3 = 1,0 \quad x_4 = 0,7 \quad x_5 = 1,3$$

Antag i den resterende del af opgaven, at σ er kendt som $\sigma = 0,2$.

- a) Bestem et estimat for den sande værdi μ .
- b) Bestem variansen for stikprøvegennemsnittet \bar{X} .

- c) Bestem konfidensintervallet for μ på konfidensniveau 95%.
- d) Bestem konfidensintervallet for μ på konfidensniveau 99%.

Opgave 4

Betragt en vinkel, som vi kan måle med spredning 5 mgon. Antag at målingen er normalfordelt.

Antag, at vi foretager n uafhængige målinger (satser) af vinklen β , og lad \bar{X} betegne gennemsnittet af disse.

- a) Bestem (et udtryk for) middelværdien og variansen for \bar{X} ? Hvilken fordeling følger \bar{X} ?
- b) Bestem n , således at

$$P(|\bar{X} - \beta| < 3 \text{ mgon}) = 0.95$$

Fortolk resultaterne.