# Opgaver til lektion 4

**Opgave 1**

Antag $x_1 = 10$ og $x_2 = 14$ er observationer af uafhængige stokastiske variable $X_1$ og $X_2$ med fælles middelværdi $\mu$ og $\mathbb{V}\mathrm{ar}X_1 = \sigma_1^2 = 4$ og $\mathbb{V}\mathrm{ar}X_2 = \sigma_2^2 = 8$. Hvilket estimat vil du angive for $\mu$ ? Hvad er variansen på estimatet ?

**Opgave 2**

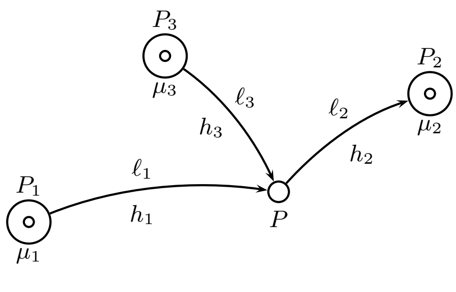
Der foretages frem- og tilbage-nivellering på 8 strækninger med følgende resultat. Dvs. målinger af den samme højdeforskel foretages to gange - ét fremsigte og ét tilbagesigte. Der er altså tale om dobbeltmålinger af samme størrelse.

| strækning | vejlængde (m) | højdeforskel frem (mm) | højdeforskel tilbage (mm) |
|---|---|---|---|
| 1 | 861 | -91 | 89 |
| 2 | 624 | 219 | -217 |
| 3 | 986 | 459 | -475 |
| 4 | 595 | 353 | -359 |
| 5 | 110 | -130 | 132 |
| 6 | 1033 | 132 | -137 |
| 7 | 952 | 636 | -645 |
| 8 | 675 | -638 | 637 |

a) Lad $X_{i1}$ og $X_{i2}$ være to uafhængige stokastiske variable, der repræsenterer måling af højdeforskel ved hhv. frem- og tilbagesigte over en strækning $\ell_i$. Der gælder $\mathbb{E}[X_{i1}] = \mu_i$, $\mathbb{E}[X_{i2}] = -\mu_i$ og $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_{i1}] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_{i2}] = \sigma_k^2 \ell_i$, hvor $\sigma_k$ er kilometerspredningen. Vis at middelværdi og varians for $(X_{i1} + X_{i2})/\sqrt{2\ell_i}$ er hhv. 0 og $\sigma_k^2$.

b) Beregn et estimat $s_k$ for kilometerspredningen.

c) Estimer den totale højdeforskel på baggrund af frem- og tilbage-nivelleringerne. Angiv et konfidensinterval for højdeforskellen.




Figur 1: Illustration hørende til opgave 3.

**Opgave 3**

- Betragt punkterne $P_1$, $P_2$ og $P$ i Figur 2. Punkterne $P_1$ og $P_2$ har kendte koter, hhv. $\mu_1 = 7845$mm og $\mu_2 = 8157$mm. Fra punktet $P_1$ til punktet $P$ er den målte afstand $\ell_1 = 861$m og den målte højdeforskel $h_1 = 92$mm. Fra punktet $P$ til punktet $P_2$ er den målte afstand $\ell_2 = 624$m og den målte højdeforskel $h_2 = 217$mm. Lad $\mu_p$ betegne den ukendte kote i punktet $P$.

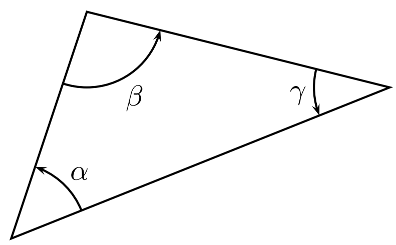
a) Koten $\mu_P$ for punktet $P$ kan estimeres ved et vægtet gennemsnit af $\mu_1 + h_1$ og $\mu_2 - h_2$. Bestem estimatet for $\mu_P$.

b) Bestem slutfejlen for strækningen fra $P_1$ til $P_2$ og fordel den på $h_1$ og $h_2$.

c) Bestem variansen for estimatet for $\mu_P$ idet kilometerspredningen $\sigma_k = 2\text{mm}/\sqrt{\text{km}}$.

- Punktet $P_3$ i figur 2 har den kendte kote $\mu_3 = 7597$mm. Fra punktet $P_3$ til punktet $P$ er den målte afstand $\ell_3 = 763$m og den målte højdeforskel $h_3 = 342$mm.

d) Koten for punktet $P$ kan estimeres ved et vægtet gennemsnit af $\mu_1 + h_1$, $\mu_2 - h_2$ og $\mu_3 + h_3$. Bestem et (nyt) estimat af $\mu_p$.




Figur 2: Illustration hørende til opgave 2.

**Opgave 4**

Vinklerne $\alpha$, $\beta$ og $\gamma$ i trekanten i Figur 1 er opmålt med samme præcision. De målte vinkler er $x_\alpha = 55.4$, $x_\beta = 105.3$ og $x_\gamma = 39.7$ - alle i gon. Bestem slutfejlen og fordel den på vinklerne.

**Opgave 5**

Antag, at vi har målt størrelsen $\mu$ to gange, og dermed observeret to uafhængige stokastiske variable $X_1$ og $X_2$, hvor vi antager, at nøjagtigheden på den første måling er bedre end nøjagtigheden på den anden måling.

Dvs. $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mu$ og $\mathbb{V}\text{ar}(X_1) = \sigma_1^2 < \mathbb{V}\text{ar}(X_2) = \sigma_2^2$.

Lad $0 < \alpha < 1$.

a) Vis, at $\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2$ er en central estimator for $\mu$, dvs. $\mathbb{E}(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) = \mu$.

b) Vis, at $\mathbb{V}\text{ar}(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) = \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2$, samt at denne varians er mindst, når $\alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. Hint: Vi er på jagt efter bundpunktet for parablen beskrevet af $\alpha$.

c) Vis, at de fundne vægte $p_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ og $p_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ opfylder vægtrelationen.