Landmålingens fejlteori
Lektion 6
Den generelle fejlforplantningslov

Rasmus Waagepetersen - rw@math.aau.dk

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

Simple fejlforplantningslov

Antag $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er n *uafhængige* stokastiske variable, hvor $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \sigma_1^2, \ldots, \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \sigma_n^2$.

Lad $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, hvor g er en differentiabel funktion.

Et tilnærmet udtryk for variansen for $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = \sigma_Y^2$ er

$$\sigma_Y^2 \approx \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^2 \sigma_n^2$$

Planlægning af måleserier

I eksempel 27 i noterne kom vi frem til følgende estimat af variansen på det estimerede trekant-areal:

$$\sigma_T^2 \approx 75.66^2 \cdot 0.01^2 + 57.44^2 \cdot 0.01^2 + (927.1\pi/200)^2 \cdot 0.002^2$$
$$\approx 75.66^2 \cdot 0.01^2 + 57.44^2 \cdot 0.01^2 + (14.56)^2 \cdot 0.002^2$$

Leddene svarer til bidrag fra målingerne af side a, side b og vinkel C med spredningerne 0.01, 0.01 og 0.002.

Hvis vi ønsker at reducere variansen ved at foretage yderligere målinger - hvad er da den bedste fremgangsmåde ?

Kovarians og korrelation

Kovarians:

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$$

Korrelation:

$$\rho = \mathbb{C}\mathrm{orr}(X_1, X_2) = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}X_1 \mathbb{V}\mathrm{ar}X_2}} = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

ρ mellem -1 og 1

ρ positiv/negativ $\Leftrightarrow$ positiv/negativ sammenhæng mellem X_1 og X_2.

Eks.: X_1 har spredning 0.1 og er uafhængig af ν som har spredning 0.05.
Hvad er kovariansen og korrelationen mellem X_1 og $X_2 = X_1 + \nu$?

Variansen af afhængige variable

Varians for linearkombination af afhængige SV

Antag $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er stokastiske variable, med varianser $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$. Antag desuden, at kovariansen mellem X_i og X_j er $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$.
Variansen for linearkombinationen er

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(a_0 + a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) &= a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j \sigma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j \sigma_{ij}\end{aligned}$$

Fejlforplantning med afhængige variable

Lad $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ hvor $\sigma_{ij} = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j)$ kan være forskellig fra nul. Da gælder

$$\sigma_Y^2 \approx \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^2 \sigma_n^2 + 2 \sum_{i<j} \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial X_j} \sigma_{ij}$$

Dvs. vi skal nu også inkludere en sum over alle par X_i, X_j, $i \neq j$.

Eksempel

Lad X_1 og X_2 være stokastiske variable med middelværdi og spredninger μ_1, μ_2 og σ_1, σ_2 hvor $\mathbb{C}\mathrm{orr}(X_1, X_2) = \rho \neq 0$.
Vi ønsker at bestemme variansen af $Y = \frac{X_1}{X_2}$. Dvs vi skal bestemme de partielt afledte af Y mht. X_1 og X_2,

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{1}{X_2} \qquad \frac{\partial Y}{\partial X_2} = -\frac{X_1}{X_2^2}$$

Indsættes udtrykkene nu i formlen for σ_Y^2 får vi

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &\approx \left(\frac{1}{\mu_2}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(-\frac{\mu_1}{\mu_2^2}\right)^2 \sigma_2^2 + 2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)\left(-\frac{\mu_1}{\mu_2^2}\right)\sigma_{12} \\ &= \left(\frac{\sigma_1}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2^2}\right)^2 \sigma_2^2 - 2\frac{\mu_1}{\mu_2^3}\sigma_1\sigma_2\rho \end{aligned}$$

Godt eller skidt at have positiv korrelation?

Motiverende eksempel: Polære koordinater

I landmåling forekommer polære målinger hvor de rektangulære målinger fremkommer ved følgende sammenhænge,

$$X = S\cos\theta \quad Y = S\sin\theta$$

- Vi ser at både X og Y er transformationer af de samme stokastiske variable S og θ.
- Det medfører at de *ikke* er indbyrdes uafhængige og derfor har vi typisk $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) \neq 0$. Vi siger også at X og Y er korrelerede.
- Målet er nu at finde et (tilnærmet) udtryk for kovariansen mellem X og Y.
- først får vi brug for lidt vektor og matrix-regning.

Stokastiske vektorer

Antag $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er SV. Vi kan da forme en *stokastisk vektor*

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Antag X_i har middelværdi μ_i, da kan vi definere en middelværdi-vektor:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}.$$

Kovariansmatricen

Antag X_i har varians σ_i^2 og kovariansen mellem X_i og X_j er $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$.

Alle varianser og kovarianser kan samles i en *kovarians-matrix*

$$K_{\mathbf{X}} = \mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & & \sigma_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Kovariansmatricen $K_{\mathbf{X}}$ er en kvadratisk og symmetrisk $n \times n$ matrix, da $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_j, X_i)$.

Kovariansmatricen $K_{\mathbf{X}}$

I tilfældet, hvor X_i'erne er indbyrdes uafhængige, er $\sigma_{ij} = 0$ for alle i og j og $K_{\mathbf{X}}$ bliver således en diagonal matrix:

$$K_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Regneregler

Antag at $\mathbf{X}$ er en $n \times 1$ søjle-vektor (som før).

Antag $\mathbf{A}$ er en $m \times n$ matrix og $\mathbf{b}$ er en $m \times 1$ søjle-vektor og lad

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}.$$

Da er $\mathbf{Y}$ en $m \times 1$ søjle-vektor med middelværdi-vektor

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = \mathbb{E}[A\mathbf{X} + \mathbf{b}] = \mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbf{b}.$$

og kovariansmatrix

$$\mathbb{V}\text{ar}[\mathbf{Y}] = \mathbb{V}\text{ar}[A\mathbf{X} + \mathbf{b}] = \mathbf{A}\mathbb{V}\text{ar}(\mathbf{X})\mathbf{A}^T = \mathbf{A}K_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T$$

Vilkårlige transformationer

Antag nu $Y_1, \dots, Y_m$ er transformationer af $X_1, \dots, X_n$.

Dvs.

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= g_1(X_1, \dots, X_n) \\
Y_2 &= g_2(X_1, \dots, X_n) \\
&\vdots \\
Y_m &= g_m(X_1, \dots, X_n)
\end{aligned}
$$

hvor $g_1, \dots, g_m$ er m differentiable funktioner

Linearisering af $\mathbf{Y}$ — matrixform

Som tidligere laver vi en lineær approximation af Y_k omkring middelværdierne af X'erne,

$$Y_k \approx g_k(\mu_1, \dots, \mu_n) + \frac{\partial g_k}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \cdots + \frac{\partial g_k}{\partial X_n}(X_n - \mu_n)$$

Omskrevet til matrix-form:

$$\begin{aligned}
Y_k &\approx g_k(\cdots) + \begin{bmatrix} \frac{\partial g_k}{\partial X_1} & \frac{\partial g_k}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ X_n - \mu_n \end{bmatrix} \\
&= g_k(\cdots) - \begin{bmatrix} \frac{\partial g_k}{\partial X_1} & \frac{\partial g_k}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial g_k}{\partial X_1} & \frac{\partial g_k}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \\
&= g_k(\cdots) - \mathbf{G}_k \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} + \mathbf{G}_k \mathbf{X}.
\end{aligned}$$

Tilnærmet udtryk for variansen af Y_k

Lineariseringen af Y_k kan (altså) skrives som

$$Y_k \approx g_k(\cdots) - \mathbf{G}_k \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} + \mathbf{G}_k \mathbf{X},$$

hvor $\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_k}{\partial X_1} & \frac{\partial g_k}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial X_n} \end{bmatrix}$.

Et tilnærmet udtryk for variansen for Y_k er

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_k) &\approx \mathbb{V}\mathrm{ar}\big(g_k(\cdots) - \mathbf{G}_k \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} + \mathbf{G}_k \mathbf{X}\big) \\
&= \underbrace{\mathbf{G}_k}_{1\times n} \underbrace{\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbf{X})}_{n\times n} \underbrace{\mathbf{G}_k^T}_{n\times 1} = \mathbf{G}_k K_{\mathbf{X}} G_k^T = \\
&= \left(\frac{\partial g_k}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g_k}{\partial X_n}\right)^2 \sigma_n^2 + 2\sum_{i<j} \frac{\partial g_k}{\partial X_i} \frac{\partial g_k}{\partial X_j} \sigma_{ij}.
\end{aligned}$$

Resultatet matcher de tidligere beregninger **Ex:** varians for $Y = X_1/X_2$ vha. matrixberegning.

Linearisering af $\mathbf{Y}$ på matrixform

Lineariseringen for $Y_1, \ldots, Y_m$ kan skrives samlet som

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &\approx \mathbf{g} + \mathbf{G}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}) \\ &= \mathbf{g} - \mathbf{G}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} + \mathbf{G}\mathbf{X},\end{aligned}$$

hvor

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1(\mu_1, \ldots, \mu_n) \\ g_2(\mu_1, \ldots, \mu_n) \\ \vdots \\ g_m(\mu_1, \ldots, \mu_n) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial X_1} & \frac{\partial g_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial X_1} & \frac{\partial g_2}{\partial X_2} & & \frac{\partial g_2}{\partial X_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial X_1} & \frac{\partial g_m}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

Matricen $\mathbf{G}$ kaldes *Jacobi-matricen*.

Den generelle fejlforplantningslov

Et tilnærmet udtryk for kovariansmatricen for $\mathbf{Y}$ er

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbf{Y}) &\approx \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbf{g} - \mathbf{G}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} + \mathbf{G}\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{G}\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbf{X})\mathbf{G}^T = \mathbf{G}K_{\mathbf{X}}\mathbf{G}^T\end{aligned}$$

Dette resultat kan opsummeres i den generelle fejlforplantningslov:

Den Generelle Fejlforplantningslov

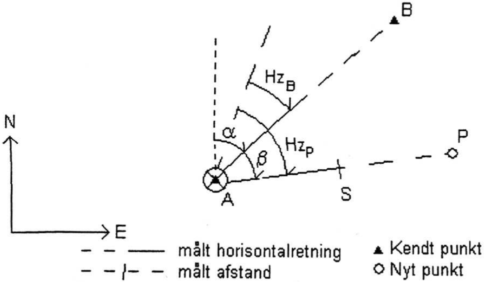
Antag $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er SV med kovariansmatrix $K_{\mathbf{X}}$. Antag for $i = 1, \ldots, m$, at $Y_i = g_i(X_1, \ldots, X_n)$, hvor g_i er en differentiabel funktion. Da er et tilnærmet udtryk for kovariansmatricen for $\mathbf{Y}$ givet ved

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbf{Y}) \approx \mathbf{G}\,K_{\mathbf{X}}\mathbf{G}^T,$$

hvor $\mathbf{G}$ er jacobimatricen.

Anvendelse: Polære målinger

Afsnit 11.3 i Karsten Jensens noter:



Koordinaterne til punkt $P = (E, N)$. Vinklerne er målt in gon.

$$\begin{pmatrix} E \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_A + S\cos(100 - [\alpha + \beta]) \\ N_A + S\sin(100 - [\alpha + \beta]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_A + S\sin(\alpha + \beta) \\ N_A + S\cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix},$$

idet $\sin(100 - \theta) = \cos(\theta)$ og $\cos(100 - \theta) = \sin(\theta)$.

Nøjagtighed af punktet P

Vi antager at koordinaterne for opstillingspunkterne A og B er fejlfrie, dvs $\sigma^2_{E_A} \approx 0$, $\sigma^2_{N_A} \approx 0$, $\sigma^2_{E_B} \approx 0$, $\sigma^2_{N_B} \approx 0$, og dermed $\sigma_\alpha \approx 0$.

Vi antager også, at målingerne af S og β er uafhængige. Kovariansmatricen for $[S, \beta]^T$ er derfor

$$K_b = \begin{bmatrix} \sigma^2_S & 0 \\ 0 & \sigma^2_\beta \end{bmatrix}$$

Ifølge den generelle fejlforplantningslov er et tilnærmet udtryk for kovariansmatricen for (E, N) givet ved

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\begin{bmatrix} E \\ N \end{bmatrix}\right) = K_{EN} = G K_b G^\top = \begin{bmatrix} \sigma^2_E & \sigma_{EN} \\ \sigma_{NE} & \sigma^2_N \end{bmatrix}$$

hvor G er Jakobimatricen:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial E}{\partial \beta} \\ \frac{\partial N}{\partial S} & \frac{\partial N}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & S\cos(\alpha + \beta)\frac{1}{\omega} \\ \cos(\alpha + \beta) & -S\sin(\alpha + \beta)\frac{1}{\omega} \end{bmatrix} \quad \omega = \frac{200\text{gon}}{\pi}$$

Kovariansmatricen K_{EN}

Vi anvender udtrykket for K_{EN} og indsætter de kendte matricer,

$$K_{EN} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & S\cos(\theta)\frac{1}{\omega} \\ \cos(\theta) & -S\sin(\theta)\frac{1}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_S^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ S\cos(\theta)\frac{1}{\omega} & -S\sin(\theta)\frac{1}{\omega} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_S^2\sin(\theta) & \sigma_\beta^2 S\cos(\theta)\frac{1}{\omega} \\ \sigma_S^2\cos(\theta) & -\sigma_\beta^2 S\sin(\theta)\frac{1}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ S\cos(\theta)\frac{1}{\omega} & -S\sin(\theta)\frac{1}{\omega} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_S^2\sin^2(\theta) + \sigma_\beta^2 S^2\cos^2(\theta)\frac{1}{\omega^2} & (\sigma_S^2 - \sigma_\beta^2 S^2\frac{1}{\omega^2})\cos(\theta)\sin(\theta) \\ (\sigma_S^2 - \sigma_\beta^2 S^2\frac{1}{\omega^2})\sin(\theta)\cos(\theta) & \sigma_S^2\cos^2(\theta) + \sigma_\beta^2 S^2\sin^2(\theta)\frac{1}{\omega^2} \end{bmatrix}$$

hvor $\theta = \alpha + \beta$. Idet der gælder $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ forkortes

$$= \begin{bmatrix} \sigma_S^2\sin^2(\alpha+\beta) + \sigma_\beta^2\frac{S^2}{\omega^2}\cos^2(\alpha+\beta) & \frac{1}{2}(\sigma_S^2 - \sigma_\beta^2\frac{S^2}{\omega^2})\sin(2[\alpha+\beta]) \\ \frac{1}{2}(\sigma_S^2 - \sigma_\beta^2\frac{S^2}{\omega^2})\sin(2[\alpha+\beta]) & \sigma_S^2\cos^2(\alpha+\beta) + \sigma_\beta^2\frac{S^2}{\omega^2}\sin^2(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Næsten som (11.2) i Karstens noter (der manger nogle ω'er i noterne).

Implementation i matlab

(se `polar_fejlforplantning.m` script på hjemmesiden)

```
sigmaS=0.01
sigmabeta=0.1
theta=60*pi/200  (theta=alpha+beta)
S=254
omega=200/pi
Kb=[power(sigmaS,2) 0 ; 0 power(sigmabeta,2)]
G=[sin(theta) S*cos(theta)/omega; cos(theta) -S*sin(theta)/omega
KEN=G*Kb*transpose(G)
corr=-0.0757/sqrt(0.0551*0.1042)
```

Trekant-areal-beregningerne fra lektion 5

```
a=115.5434
b=152.1584
c=181.1240
A=43.7495*pi/200
B=62.9515*pi/200
C=93.2910*pi/200

T1=0.5*a*b*sin(C)
T2=0.5*a*c*sin(B)
T3=0.5*b*c*sin(A)

sigmaside2=power(0.01,2)
sigmaangle2=power(0.002,2)
K=diag([sigmaside2/8 sigmaside2/3 sigmaside2/5 sigmaangle2/2 sig
G=[T1/a T1/b 0 0 0 T1/(tan(C)*omega);T2/a 0 T2/c 0  T2/(tan(B)*o
0 T3/b T3/c T3/(tan(A)*omega) 0 0]

VarT=G*K*transpose(G)
```

Varians af vægtet gennemsnit

Vi kan skrive vægtet gennemsnit som matrix produkt

$$\bar{x}^* = \mathbf{w}\mathbf{T}^T$$

hvor

$$\mathbf{w} = [p_1, p_2, p_3]/(p_+) \quad \mathbf{T} = [T_1, T_2, T_3]$$

Dvs.

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\bar{X}^* = \mathbf{w}\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbf{T}\mathbf{w}^T$$

I matlab:

```
p=[1 1.4399 0.8553]
w=p/sum(p)
w*VarT*transpose(w)
```

Svar=0.1021 dvs. del mindre end de separate varianser for T_1, T_2 og T_3.

Optimal estimation baseret på afhængige observationer

Antag $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er stokastiske variable, alle med samme middelværdi μ og kovariansmatrix K_X.

Lad $\mathbf{X} = [X_1 X_2 \cdots X_n]$. Da er det optimale vægtede gennemsnit af $X_1, \ldots, X_n$ givet ved

$$\bar{X}^* = \mathbf{w}\mathbf{X}^\top$$

hvor $\mathbf{w}$ er $1 \times n$ matricen (rækkevektoren)

$$\mathbf{w} = (\mathbf{1}K_X^{-1}\mathbf{1}^\top)^{-1}\mathbf{1}K_X^{-1}$$

hvor $\mathbf{1} = [11 \cdots 1]$ er $1 \times n$ matricen med 1 i alle indgange.

Variansen for $\bar{X}^*$ er

$$(\mathbf{1}^\top K_X^{1}\mathbf{1})^{-1}$$

Optimal estimation - tilbage til trekanten

Ser vi på trekant-areal beregningerne er bedste estimat for arealet baseret på T_1, T_2, T_3 givet ved

$$(\mathbf{1}^\top K_T^{-1} \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}^\top K_T^{-1} \mathbf{T} = 8741.5$$

med varians

$$(\mathbf{1}^\top K_T^{1} \mathbf{1})^{-1} = 0.0979$$

Fordeling af slutfejl i trekant - generelle varianser

Lad X_α, X_β og X_γ være uafhængige målinger af vinklerne α, β og γ med varianser σ_α^2, σ_β^2 og σ_γ^2.

Vi kan da estimere α ved et vægtet gennemsnit af X_α og $Y_\alpha = 200 - X_\beta - X_\gamma$ med vægte 1 og $\sigma_\alpha^2/\sigma_{Y_\alpha}^2$ hvor $\sigma_{Y_\alpha}^2 = \sigma_\beta^2 + \sigma_\gamma^2$ er variansen af Y_α.

Lad $\sigma_+^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_\gamma^2$ være summen af alle varianserne.

Det vægtede gennemsnit er da

$$\bar{X}^* = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_{Y_\alpha}^2}} X_\alpha + \frac{\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_{Y_\alpha}^2}}{1 + \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_{Y_\alpha}^2}} Y_\alpha = \frac{1}{\frac{\sigma_+}{\sigma_{Y_\alpha}^2}} X_\alpha + \frac{\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_{Y_\alpha}^2}}{\frac{\sigma_+}{\sigma_{Y_\alpha}^2}} (r + X_\alpha) = X_\alpha + \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_+^2} r$$

Estimatet af α tildeles den andel af slutfejlen r som svarer til X_αs andel af den samlede varians.