

Landmålingens fejlteori

Lektion 4

Repetition

Geometrisk nivellement

Vægtede gennemsnit

Fordeling af slutfejl i nivellement

Rasmus Waagepetersen - rw@math.aau.dk

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

Middelværdi og varians af sum

“middelværdi af sum er lig summen af middelværdierne”

Hvis de stokastiske variable er uafhængige: “variens af sum er lig summen af variens”

Middelværdi og varians af $3X + 4Y - Z$ hvor X, Y, Z er uafhængige med middelværdier -2, 3, 2 og varianser 1, 2, 1 ?

Hvis X_i alle normalfordelte gælder

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Hvis X_i ikke er normalfordelte

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

hvor tilnærmelse bedre jo større n .

Konfidensinterval

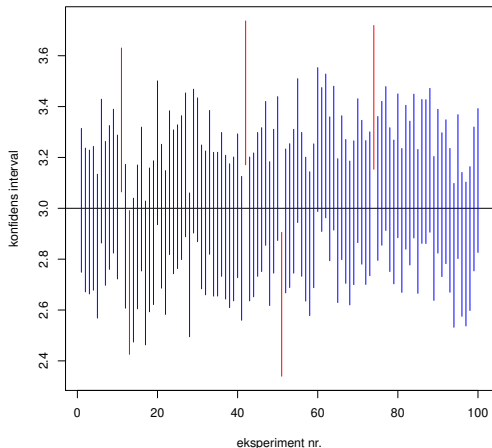
$$\bar{X} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

indeholder μ med 95% sandsynlighed

(99% hvis 1.96 erstattes med 2.58)

Konfidensintervaller for 100 simulerede måleserier hver med 100 målinger
 $(X_{ij} \sim N(3,2), i,j = 1, \dots, 100)$

Ca. 95% indeholder den sande værdi $\mu = 3$.



Estimation af varians/spredning

Antag $X_1, \dots, X_n$ stokastiske variable med fælles middelværdi μ og varians σ^2 .

Hvis μ er *kendt* estimeres σ^2 ved

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

Hvis μ er *ukendt* estimeres σ^2 ved

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

NB: begge estimater er centrale (middelværdirette) men $\hat{S}^2$ har mindst varians (mest præcist).

Anvendelse af konfidensinterval

Enggaard A/S vil have målt en længde med en “præcision” på $\pm 5\text{cm}$.

Oversættelse til fejlteori: med meget “stor” sandsynlighed skal forskellen mellem estimat $\bar{X}$ og sand længde μ være mindre end 5cm.

Fortolker vi “stor” sandsynlighed som 99.9% skal der gælde at $3.29\sigma/\sqrt{n} < 5$ (3.29 spredninger giver 99.9%).

Eks. $n = 2$ og $\sigma = 5\text{cm}$.

Da gælder $3.29\sigma/\sqrt{2} = 11.63$. Dvs. kravet er ikke opfyldt.

Mulig løsning: vælg n så

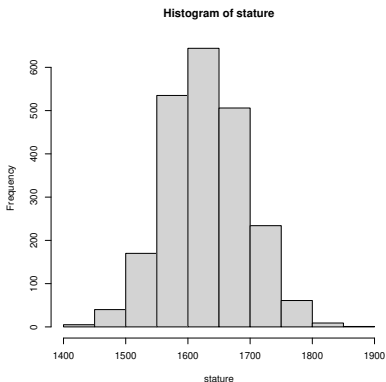
$$3.29\sigma/\sqrt{n} < 5 \Leftrightarrow n > (3.29\sigma/5)^2$$

Da skal vi have $n \geq 11$.

Højder af kvindelige soldater i US Army

ANSUR database: 131 kropsmål på 2205 kvindelige soldater.

Højde (i mm):



$$\bar{X} = 1629.5$$

$$s = 63.5$$

Spørgsmål

1. Giv et 95% sandsynlighedsinterval for højden af en soldat
2. Udregn et 95% konfidensinterval for middelhøjden

Eksempel: børnefødsler i DK

Data hentet fra EUROSTATS: antal drenge og piger født i DK i 2016:

drenge	31.781
piger	29.833
total	61.614

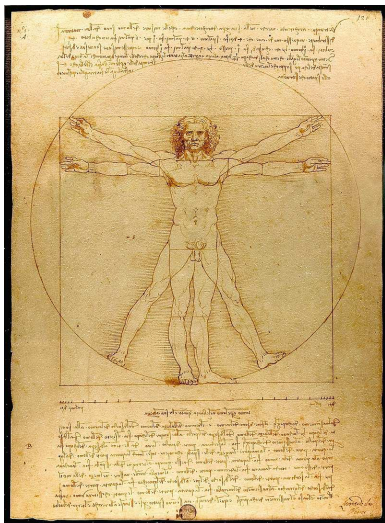
Lad μ angive sandsynligheden for at et nyfødt barn er en dreng. Denne sandsynlighed estimeres ved

$$\hat{\mu} = \frac{31781}{61614} = 0.5158$$

Bemærk: $\hat{\mu}$ kan betragtes som gennemsnit $\bar{X}$ af $n = 61614$ binære observationer X_i hvor X_i lig 1 hvis i te barn er en dreng og nul hvis barnet er en pige.

1. Udregn et 95% konfidensinterval for μ under antagelse af at variansen $\text{Var}X_i = 0.25$
2. Er der lige stor sandsynlighed for drenge og pigefødsler ?

Den vitruvianske mand



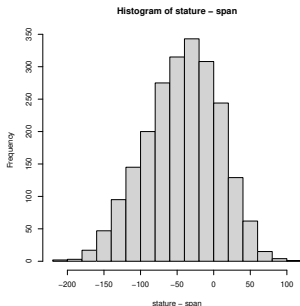
Fra Wikipedia (om Leonardo da Vincis vitruvianske mand):

“For if we measure the distance from the soles of the feet to the top of the head, and then apply that measure to the outstretched arms, the breadth will be found to be the same as the height, as in the case of plane surfaces which are perfectly square.”

US Army Vitruvian woman ?

I ANSUR databasen kan vi også finde SPAN - afstand mellem fingerspidser når arme strakt ud til hver side.

Histogram af STATURE-SPAN:



$$\bar{X} = -4.26\text{cm} \quad s = 5.01 \text{ s}/\sqrt{2205} = 0.11$$

Er forskellen mellem stature og span lig nul i snit ($\mu = 0$) ?

Kalibrering

Vi måler en kendt længde (3cm) 100 gange med nyt instrument.

3.069, 3.1855, 3.1139, 3.0153, 3.0857, ...

$$\bar{x} = 3.093 \quad s = 0.0479$$

Hvad er konfidensintervallet ?

Er instrumentet kalibreret ?

Konfidensinterval: generelt set-up

Antag at θ er en ukendt størrelse som estimeres af $Y \sim N(\theta, \tau^2)$.

Da er et 95% konfidensinterval for θ givet ved

$$[Y - 1.96\tau; Y + 1.96\tau]$$

Y kunne eksempelvis være et empirisk gennemsnit af målinger $X_1, \dots, X_n$ med middelværdi θ og varians σ^2 .

Da har vi $\tau^2 = \sigma^2/n$ som før.

Linearisering

Antag X har middelværdi 10 og spredning 0.1.

Lad $Y = \log(X)$ (naturlig logaritme).

Linearisering af $\log(\cdot)$:

$$\log(x) \approx \log(10) + \frac{1}{10}(x - 10) = \frac{1}{10}x + \log(10) - 1$$

Dermed

$$\mathbb{E}Y \approx \log(10) = 2.306 \quad \mathbb{V}arY \approx \left(\frac{1}{10}\right)^2 0.1^2 = 0.0001$$

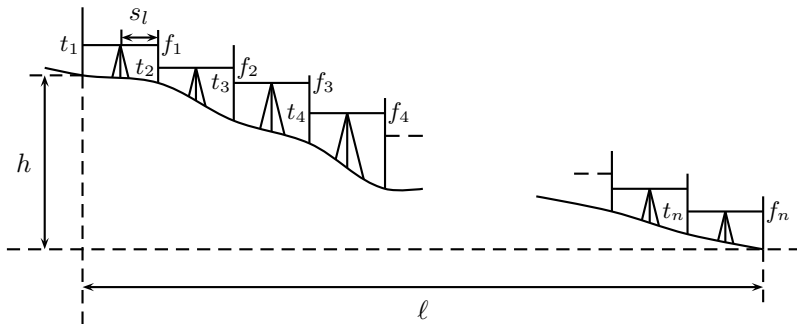
Fortolkning af afledet

Hvis $Y = h(X)$ måler $h'(\mu)$ hvor sensitiv Y er overfor ændringer i X omkring μ (hvor meget giver en ændring i X anledning til at Y ændres).

Derfor giver det god mening at

$$\text{Var}Y \approx (h'(\mu))^2 \text{Var}X$$

Geometrisk nivellement



t_i : stadiaeflæsning ved tilbagesigte

f_i : stadiaeflæsning ved fremsigte

$$h = (t_1 - f_1) + (t_2 - f_2) + \cdots + (t_n - f_n) = \sum_{i=1}^n (t_i - f_i)$$

Totallængden ℓ er opdelt i $2n$ stykker af længde s_l , dvs. $\ell = 2ns_l$.

Modellen

Vi antager af t_i og f_i er realisationer af uafhængige stokastiske variable T_i og F_i med samme varians σ_a^2 , $i = 1, \dots, n$. Denne antagelse kan begrundes med, at sigteafstanden er fast og den samme for alle observationer.

Ydermere bliver h således en realisation af den stokastiske variabel

$$H = \sum_{i=1}^n (T_i - F_i).$$

Dvs:

$$\begin{array}{cccccc} T_1 & F_1 & \dots & T_n & F_n & H \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_1 & f_1 & \dots & t_n & f_n & h \end{array}$$

Variansen af højdemålingen

Variansen af H bestemmes ved

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}(H) &= \mathbb{V}\text{ar}\left(\sum_{i=1}^n (T_i - F_i)\right) = \sum_{i=1}^n [\mathbb{V}\text{ar}(T_i) + \mathbb{V}\text{ar}(F_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n (\sigma_a^2 + \sigma_a^2) \\ &= 2n\sigma_a^2\end{aligned}$$

Fra tidligere slide ved vi, at $2n = \ell/s_l$. Der gælder derfor

$$\sigma_\ell^2 = \mathbb{V}\text{ar}(H) = \ell\sigma_a^2/s_l.$$

Erfaringer viser at $\sigma_a/\sqrt{s_l}$ kun i ringe grad afhænger af s_l når $s_l < 100$ m.

Således indføres **kilometerspredningen** $\sigma_k = \sigma_a/\sqrt{s_l}$, dvs. $\sigma_a = \sigma_k\sqrt{s_l}$.

Heraf følger

$$\sigma_\ell^2 = \mathbb{V}\text{ar}(H) = \ell\sigma_a^2/s_l = \ell\sigma_k^2$$

Konfidensinterval for højden

Spredningen på et geometrisk nivellement over længden ℓ er således $\sigma_\ell = \sqrt{\ell}\sigma_k$.

Et 95% konfidens interval for den ukendte højde er

$$H \pm 1.96\sqrt{\ell}\sigma_k$$

(jf. tidligere slide om konfidensinterval i generelt set-up)

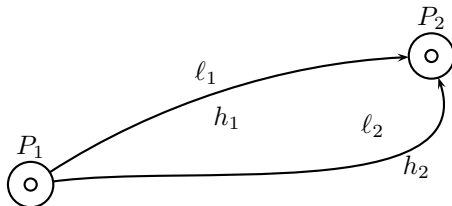
Eksempel: $h = 12000\text{mm}$, $\sigma_k = 3\text{mm}/\sqrt{\text{km}}$ og $\ell = 4\text{km}$.

Konfidensinterval

$$12000 \pm 1.96\sqrt{4\text{km}}3\text{mm}/\sqrt{\text{km}} = [11988\text{mm}; 12012\text{mm}]$$

Vægte — motiverende eksempel

- Højdeforskellen mellem punkterne P_1 og P_2 er opmålt ved et geometrisk nivellement over to forskellige strækninger med længder $\ell_1 < \ell_2$.



- De to estimater h_1 og h_2 er realisationer af stokastiske variable H_1 og H_2 med varianser $\ell_1\sigma_k^2$ og $\ell_2\sigma_k^2$.
- Kan vi kombinere de to estimater h_1 og h_2 for at opnå et bedre estimat under hensyntagen til, at der er større usikkerhed for H_2 end for H_1 ?
- En mulighed: $h = (h_1 + h_2)/2$ - men det kan gøres bedre !

Vægte

Antag $X_1, \dots, X_n$ er uafhængige stokastiske variable med ens middelværdi μ men forskellige varianser $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$.

F.eks. målinger med instrumenter af variende kvalitet eller nogle X_i kunne repræsentere gennemsnit af gentagne målinger.

Hvert X_i tildeles en vægt $p_i > 0$ som afspejler målingens kvalitet (stort p_i svarer til god måling).

Vi estimerer da μ ved det vægtede gennemsnit

Definition: Vægtet gennemsnit

For observationer $X_1, \dots, X_n$ med vægte $p_1 > 0, \dots, p_n > 0$ er det **vægtede gennemsnit**

$$\bar{X}^* = \frac{p_1}{\sum_{i=1}^n p_i} X_1 + \dots + \frac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i} X_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i} (p_1 X_1 + \dots + p_n X_n).$$

“resulterende” vægte

$$w_i = \frac{p_i}{\sum_{l=1}^n p_l}$$

summer sammen til en:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Centralitet af vægtet gennemsnit

Det vægtede gennemsnit

$$\bar{X}^* = \frac{p_1}{\sum_{i=1}^n p_i} X_1 + \cdots + \frac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i} X_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i} (p_1 X_1 + \cdots + p_n X_n)$$

er et centralt estimat af μ , dvs.

$$\mathbb{E}(\bar{X}^*) = \mu$$

for et hvilket som helst valg af vægte $p_1 > 0, \dots, p_n > 0$.

Optimale vægte

Der er uendelig mange mulige valg af vægte. Hvad er det bedste valg ?

Bedst betyder variansen $\text{Var}\bar{X}^*$ mindst mulig !

Sætning: Optimale vægte

Variansen $\text{Var}\bar{X}^*$ er minimal hvis **vægtrelationen**

$$p_1\sigma_1^2 = p_2\sigma_2^2 = \cdots = p_n\sigma_n^2.$$

er opfyldt.

Vægtrelationen

Antag vægtrelationen er opfyldt:

$$p_1\sigma_1^2 = p_2\sigma_2^2 = \cdots = p_n\sigma_n^2.$$

Lad σ_0^2 betegne den fælles værdi af $p_i\sigma_i^2$ (svarer til varians for observation med vægt $p_0 = 1$).

Da ser vi

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

Dvs. vi skal simpelthen vælge vægtene så de er omvendt proportionale med varianserne !

Vægtrelationen: Eksempel

Antag variansen på første måling er dobbelt så stor som på den anden ($\sigma_1^2 = 2\sigma_2^2$).

Et valg af vægte, der opfylder vægtrelationen, er $p_1 = 1$ og $p_2 = 2$ ($\sigma_0^2 = 2\sigma_2^2$), idet

$$\begin{aligned} p_1\sigma_1^2 &= p_2\sigma_2^2 \\ \Leftrightarrow 1 \cdot 2\sigma_2^2 &= 2\sigma_2^2 \end{aligned}$$

Der er uendelig mange lige gode valg af vægte!!

Et andet valg er $p_1 = \frac{1}{2}$ og $p_2 = 1$ ($\sigma_0^2 = \sigma_2^2$).

Bemærk: I eksemplet er vægten på den bedste måling dobbelt så stor som vægten på den dårlige måling.

Begge valg af vægte giver samme $\bar{X}^*$:

$$p_1/(p_1 + p_2) = 1/(1 + 2) = (1/2)/(1/2 + 1) = 1/3$$

Alle vægte der opfylder vægtrelationen giver samme resulterende vægte og dermed samme $\bar{X}^*$.

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

Dermed

$$w_i = \frac{p_i}{\sum_{l=1}^n p_l} = \frac{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}}{\sum_{l=1}^n \frac{\sigma_0^2}{\sigma_l^2}} = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{l=1}^n \frac{1}{\sigma_l^2}} = \frac{1}{\sum_{l=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_l^2}}$$

Dvs. i sidste ende afhænger $\bar{X}^*$ ikke af σ_0^2 .

Variansen for det vægtede gennemsnit

Sætning: Variansen af vægtet gennemsnit

Antag vægtrelationen er opfyldt, dvs.

$$p_1\sigma_1^2 = \dots = p_n\sigma_n^2 = \sigma_0^2.$$

Da gælder

$$\text{Var}(\bar{X}^*) = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

Eksempel

X_1 , X_2 og X_3 har fælles middelværdi μ og varianser hhv. 3,4,1.

Et optimalt sæt af vægte er $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/4$ og $p_3 = 1$.

Antag $x_1 = 5$, $x_2 = 5.7$ og $x_3 = 4.9$ er observeret. Da er

$$\bar{x}^* = 5.047$$

Endvidere er

$$\text{Var}\bar{X}^* = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 1} = 0.63$$

Estimat af σ_0^2

Estimat af σ_0^2

Som estimat af σ_0^2 anvendes S_0^2 :

$$\begin{aligned} S_0^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i (X_i - \bar{X}^*)^2}{n - 1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i X_i^2 - (\bar{X}^*)^2 \sum_{i=1}^n p_i}{n - 1}. \end{aligned}$$

Der gælder, at S_0^2 er et centralt estimat for σ_0^2 : $\mathbb{E}S_0^2 = \sigma_0^2$.

Estimat af $\text{Var}(\bar{X}^*)$

- Vi har, at s_0^2 er et centralt estimat for σ_0^2 .
- Variansen for det vægtede gennemsnit er

$$\text{Var}(\bar{X}^*) = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

- Et centralt estimat for variansen af det vægtede gennemsnit er derfor

$$\frac{s_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

Eksempel: Geometrisk nivellement

En højdeforskel er nivelleret over n strækninger med *samme* kilometerspredning σ_k . Variansen over en længde ℓ er fra tidligere givet ved $\sigma_k^2 \ell$.

Højdeforskel h	Længde ℓ	Varians på h over ℓ
h_1	ℓ_1	$\sigma_1^2 = \sigma_k^2 \ell_1$
h_2	ℓ_2	$\sigma_2^2 = \sigma_k^2 \ell_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
h_n	ℓ_n	$\sigma_n^2 = \sigma_k^2 \ell_n$

Forskellige varianser pga. forskellige strækninger ($\ell_i \neq \ell_j$).

Eksempel: Geometrisk nivellement — valg af vægte

Vægtrelationen er opfyldt når

$$\sigma_0^2 = p_1 \sigma_1^2 = \cdots = p_n \sigma_n^2$$

Indsættes udtrykket for $\sigma_i^2 = \ell_i \sigma_k^2$ har vi:

$$\sigma_0^2 = p_1 \sigma_k^2 \ell_1 = \cdots = p_n \sigma_k^2 \ell_n$$

Heraf fremgår det at hvis $p_i = \ell_i^{-1}$ er ligheden opfyldt:

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \ell_1^{-1} \sigma_k^2 \ell_1 = \cdots = \ell_n^{-1} \sigma_k^2 \ell_n \\ &= \sigma_k^2 = \cdots = \sigma_k^2. \end{aligned}$$

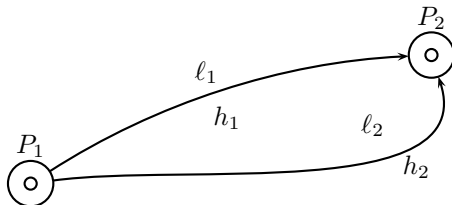
Dvs. vægte kan vælges til $p_i = (\ell_i)^{-1}$ (reciproke længde).

Bemærk: her svarer σ_0^2 til kilometervariansen σ_k^2 .

Hvis σ_k^2 er ukendt kan den estimeres vha. S_0^2 !

Eksempel

- Højdeforskellen mellem punkterne P_1 og P_2 er opmålt ved et geometrisk nivellement over to forskellige strækninger.



Data:

- $h_1 = 347\text{mm}$, $\ell_1 = 671\text{m}$
- $h_2 = 356\text{mm}$, $\ell_2 = 853\text{m}$

Estimat af højdeforskel (vægtet gennemsnit):

$$\bar{x}^* = \frac{1/671}{1/671 + 1/853} 347 + \frac{1/853}{1/671 + 1/853} 356 \approx 350,96\text{mm}$$

Antag yderligere at kilometerspredning $\sigma_k = 3\text{mm}/\sqrt{\text{km}}$.

Varians på estimatet:

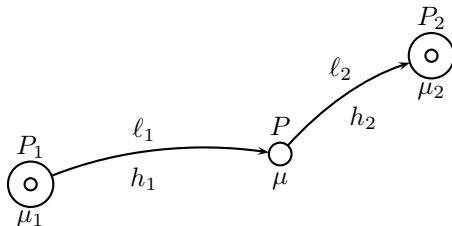
$$\text{Var}\bar{X}^* = \frac{3^2/1000}{1/671 + 1/853} = 3.3801$$

Til sammenligning er varianserne for X_1 og X_2 henholdsvis 6.039 og 7.677.

NB: vi omregner kilometervarians $3^2 \text{ mm}^2/\text{km}$ til “metervarians” $3^2/1000 \text{ mm}^2/\text{m}$ da længderne l_1 og l_2 er angivet i m .

Nivellement — bestemmelse af kote

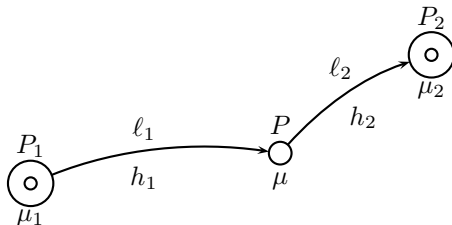
Vi ønsker at beregne koten μ til punktet P med højdeforskelle h_1 til P_1 og h_2 til P_2 . Længderne fra P til de to punkter P_1 og P_2 er henholdsvis ℓ_1 og ℓ_2 .



Punkterne P_1 og P_2 har kendte koter, hhv. μ_1 og μ_2 .

To bud på koten i P : $\mu_1 + h_1$ og $\mu_2 - h_2$.

Model



$X_1 = \mu_1 + H_1$ og $X_2 = \mu_2 - H_2$ er uafhængige stokastiske variable med $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mu$ hvor H_1 og H_2 er de stokastiske variable svarende til h_1 og h_2 .

Fra før har vi, at $\text{Var}(X_1) = \ell_1 \sigma_k^2$ og $\text{Var}(X_2) = \ell_2 \sigma_k^2$.

Estimat af μ

Til at estimere μ anvendes det vægtede gennemsnit $\bar{x}^*$ idet varianserne på højdemålingerne ikke nødvendigvis er ens,

$$\bar{x}^* = \frac{p_1}{p_1 + p_2}(\mu_1 + h_1) + \frac{p_2}{p_1 + p_2}(\mu_2 - h_2),$$

hvor vægtene p_1 og p_2 opfylder vægtrelationen $p_1 \ell_1 \sigma_k^2 = p_2 \ell_2 \sigma_k^2$.

Dvs. de reciprokke længder kan anvendes som vægte,

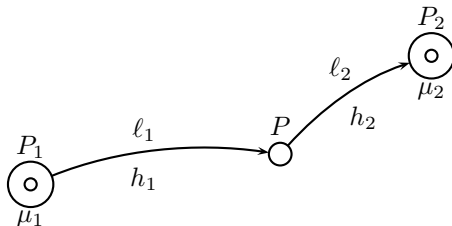
$$p_1 = \ell_1^{-1} \quad \text{og} \quad p_2 = \ell_2^{-1}.$$

Estimatet for μ er altså givet ved:

$$\bar{x}^* = \frac{\ell_1^{-1}}{\ell_1^{-1} + \ell_2^{-1}}(\mu_1 + h_1) + \frac{\ell_2^{-1}}{\ell_1^{-1} + \ell_2^{-1}}(\mu_2 - h_2).$$

Eksempel

- Højdeforskellen mellem punkterne P_1 og P_2 er opmålt ved et geometrisk nivellement over to forskellige strækninger.



Data:

- $\mu_1 = 7431\text{mm}$, $h_1 = 247\text{mm}$, $\ell_1 = 671\text{m}$
- $\mu_2 = 7828\text{mm}$, $h_2 = 156\text{mm}$, $\ell_2 = 853\text{m}$

Estimat af koten i punktet P :

$$\bar{x}^* = \frac{1/671}{1/671 + 1/853}(7431 + 247) + \frac{1/853}{1/671 + 1/853}(7828 - 156) \approx 7675,36\text{mm}$$

Estimat af μ - en omskrivning

Vi kan omskrive udtrykket for $\bar{x}^*$ således:

$$\begin{aligned}\bar{x}^* &= \frac{\ell_1^{-1}}{\ell_1^{-1} + \ell_2^{-1}}(\mu_1 + h_1) + \frac{\ell_2^{-1}}{\ell_1^{-1} + \ell_2^{-1}}(\mu_2 - h_2) \\ &= \frac{\frac{1}{\ell_1}}{\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2}} \frac{\ell_1 \ell_2}{\ell_1 \ell_2} (\mu_1 + h_1) + \frac{\frac{1}{\ell_2}}{\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2}} \frac{\ell_1 \ell_2}{\ell_1 \ell_2} (\mu_2 - h_2) \\ &= \frac{\ell_2}{\ell_1 + \ell_2}(\mu_1 + h_1) + \frac{\ell_1}{\ell_1 + \ell_2}(\mu_2 - h_2)\end{aligned}$$

Slutfejlen r

På grund af målefejl er $h_1 + h_2 \neq \mu_2 - \mu_1$. Derfor indføres **slutfejlen** r

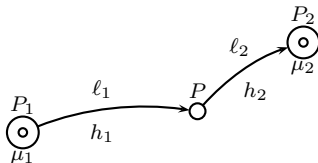
$$r = \mu_2 - \mu_1 - (h_1 + h_2) \quad \Leftrightarrow \quad \mu_2 - h_2 = \mu_1 + h_1 + r.$$

Indsættes dette i udtrykket for $\bar{x}^*$ får vi

$$\begin{aligned} \bar{x}^* &= \frac{\ell_2}{\ell_2 + \ell_1}(\mu_1 + h_1) + \frac{\ell_1}{\ell_2 + \ell_1}(\mu_2 - h_2) \\ &= \frac{\ell_2}{\ell_2 + \ell_1}(\mu_1 + h_1) + \frac{\ell_1}{\ell_2 + \ell_1}(\mu_1 + h_1 + r) \\ &= (\mu_1 + h_1) + \frac{\ell_1}{\ell_2 + \ell_1}r = (\mu_2 - h_2) - \frac{\ell_2}{\ell_2 + \ell_1}r \end{aligned}$$

Slutfejlen på estimatet $\bar{x}^*$ af koten μ skal under de anvendte vægte (reciproke længdemål) fordeles proportionalt med vejlængden.

Eksempel — fortsat



Data:

- $\mu_1 = 7431\text{mm}$, $h_1 = 247\text{mm}$, $\ell_1 = 671\text{m}$
- $\mu_2 = 7828\text{mm}$, $h_2 = 156\text{mm}$, $\ell_2 = 853\text{m}$

Slutfejl:

- $\mu_2 - \mu_1 = 7828 - 7431 = 397$, $h_1 + h_2 = 247 + 156 = 403\text{mm}$
- Slutfejl $r_n = 397 - 403 = -6\text{mm}$

Estimat af koten i punktet P :

$$(\mu_1 + h_1) + \frac{\ell_1}{\ell_2 + \ell_1} r_n = 7431 + 247 + \frac{671}{671 + 853} (-6) = 7431 + 247 - 2,64$$

Højdeforskellen h_1 skal altså nedkorrigeres 2,64mm.