

Landmålingens fejlteori

Lektion 5

Repetition

Fordeling af slutfejl i trekant

Dobbeltmålinger

Rasmus Waagepetersen - rw@math.aau.dk

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

Vægte

Antag $X_1, \dots, X_n$ er uafhængige stokastiske variable, som estimerer den samme middelværdi μ , men har forskellige varianser $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$.

Hvert X_i tildeles en vægt $p_i > 0$ som afspejler målingens kvalitet (stort p_i svarer til god måling).

Vi estimerer da μ ved det vægtede gennemsnit

For observationer $X_1, \dots, X_n$ med vægte $p_1 > 0, \dots, p_n > 0$ er det **vægtede gennemsnit**

$$\bar{X}^* = \frac{p_1}{\sum_{i=1}^n p_i} X_1 + \dots + \frac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i} X_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i} (p_1 X_1 + \dots + p_n X_n).$$

Optimale vægte

Variansen $\text{Var} \bar{X}^*$ er minimal hvis **vægtrelationen**

$$p_1 \sigma_1^2 = p_2 \sigma_2^2 = \cdots = p_n \sigma_n^2 = \sigma_0^2.$$

er opfyldt. Og der gælder

$$\text{Var}(\bar{X}^*) = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

Variansen af nivelleret højdeforskel

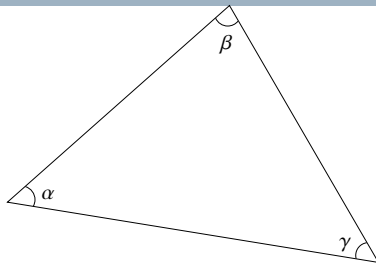
Vi nivellerer en højdeforskel H over strækningen af længde l .

Vores model for variansen er da

$$\text{Var}(H) = \sigma_k^2 l$$

dvs variansen er proportional med kilometervariansen σ_k^2 (når l måles i kilometer).

Slutfejl af vinkelmålinger i trekant



Betragt trekanten med sande vinkler α , β og γ . Dvs $\alpha + \beta + \gamma = 200$ gon.
 Lad X_α , X_β og X_γ være stokastiske variable (vinkelmålinger) med

$$\mathbb{E}(X_\alpha) = \alpha \quad \mathbb{E}(X_\beta) = \beta \quad \mathbb{E}(X_\gamma) = \gamma$$

og

$$\text{Var}(X_\alpha) = \text{Var}(X_\beta) = \text{Var}(X_\gamma) = \sigma^2$$

Estimat af α

X_α er en direkte observation af α .

$Y_\alpha = 200 - X_\beta - X_\gamma$ er en indirekte observation af α :

$$\mathbb{E}Y_\alpha = 200 - \mathbb{E}X_\beta - \mathbb{E}X_\gamma = \alpha \quad \text{Var}Y_\alpha = 2\sigma^2$$

Idet varianserne for de to observationer X_α og Y_α er forskellige anvendes vægtet gennemsnit med $p_1 = 2$ og $p_2 = 1$ (da variansen på Y_α to gange varians på X_α).

Dvs. α estimeres ved

$$\bar{x}^* = \frac{2}{3}x_\alpha + \frac{1}{3}y_\alpha = \frac{2}{3}x_\alpha + \frac{1}{3}(200 - x_\beta - x_\gamma)$$

Slutfejlen r_v på vinkelsummen

Formentlig er summen af x_α , x_β og x_γ ikke 200 gon pga. uundgåelige tilfældige målefejl.

Derfor indføres slutfejlen r_v

$$r_v = 200 - (x_\alpha + x_\beta + x_\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad 200 - x_\beta - x_\gamma = x_\alpha + r_v,$$

som indsættes i udtrykke for $\bar{x}^*$,

$$\begin{aligned} \bar{x}^* &= \frac{2}{3}x_\alpha + \frac{1}{3}(200 - x_\beta - x_\gamma) \\ &= \frac{2}{3}x_\alpha + \frac{1}{3}(x_\alpha + r_v) \\ &= x_\alpha + \frac{1}{3}r_v. \end{aligned}$$

Dvs. slutfejlen fordeles ligeligt på alle vinkler, når vinklerne er målt med samme varians (NB ikke tilfældet i eksamensopgave B).

Eksempel

$$x_\alpha = 91 \quad x_\beta = 28 \quad x_\gamma = 87$$

Slutfejl:

$$r_v = 200 - 91 - 28 - 87 = -6$$

Estimat af α :

$$x_\alpha + \frac{1}{3}r_v = 91 - 2 = 89$$

Antag spredningen på vinkelmålingerne er $\sigma = 0.1$. Da er variansen på estimatet (med $\sigma_0^2 = 2\sigma^2$)

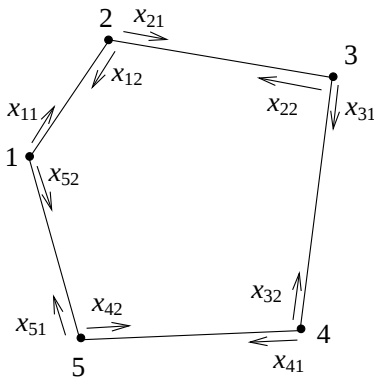
$$\mathbb{V}\text{ar} \bar{X}^* = \frac{2\sigma^2}{3} = \frac{2}{3}\sigma^2$$

og spredningen på estimatet er

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma = 0.816\sigma$$

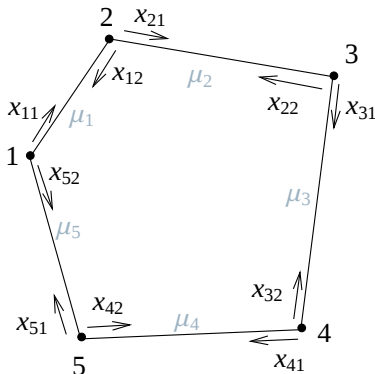
Dobbeltmålinger

Udgangspunktet er $2n$ målinger hvor målingerne to og to måler samme størrelse, altså n forskellige størrelser i alt.



Eks.: siderne i et polygon hvor hver sidelængde måles to gange.

Dobbeltmålinger



$$\begin{array}{ccccccc}
 X_{11} & X_{12} & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{n1} & X_{n2} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \dots & \downarrow & \\
 x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{n1} & x_{n2}
 \end{array}$$

Uafhængige målinger af samme kvalitet, dvs. ens varians σ^2 .

De n forskellige størrelser har sande værdier $\mu_1, \dots, \mu_n$, dvs:

$$\mathbb{E}(X_{11}) = \mathbb{E}(X_{12}) = \mu_1 \quad \dots \quad \mathbb{E}(X_{n1}) = \mathbb{E}(X_{n2}) = \mu_n.$$

Estimat af μ_i

Til at estimere μ_i anvendes estimatet $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i1} + x_{i2})$.

For den tilsvarende estimator $\bar{X}_i = \frac{1}{2}(X_{i1} + X_{i2})$ gælder der:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\bar{X}_i) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(X_{i1} + X_{i2})\right) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}(X_{i1}) + \mathbb{E}(X_{i2})) \\ &= \frac{1}{2}(\mu_i + \mu_i) = \mu_i\end{aligned}$$

Dvs. $\bar{x}_i$ er et centralt estimat af μ_i .

Estimat af μ_i

Til at estimere μ_i anvendes estimatet $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i1} + x_{i2})$.

For den tilsvarende estimator $\bar{X}_i = \frac{1}{2}(X_{i1} + X_{i2})$ gælder der:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\bar{X}_i) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(X_{i1} + X_{i2})\right) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}(X_{i1}) + \mathbb{E}(X_{i2})) \\ &= \frac{1}{2}(\mu_i + \mu_i) = \mu_i\end{aligned}$$

Dvs. $\bar{x}_i$ er et centralt estimat af μ_i . Desuden gælder:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}(\bar{X}_i) &= \mathbb{V}\text{ar}\left(\frac{1}{2}(X_{i1} + X_{i2})\right) = \frac{1}{2^2}(\mathbb{V}\text{ar}(X_{i1}) + \mathbb{V}\text{ar}(X_{i2})) \\ &= \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{2}.\end{aligned}$$

Estimat af σ^2

Idet X_{i1} og X_{i2} måler samme størrelse μ_i siger deres differens $Y_i = X_{i1} - X_{i2}$ noget om målekvaliteten.

Vi ved

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X_{i1}) - \mathbb{E}(X_{i2}) = \mu_i - \mu_i = 0$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(Y_i) = \mathbb{V}\text{ar}(X_{i1}) + \mathbb{V}\text{ar}(X_{i2}) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2.$$

Estimat af σ^2

Idet X_{i1} og X_{i2} måler samme størrelse μ_i siger deres differens $Y_i = X_{i1} - X_{i2}$ noget om målekvaliteten.

Vi ved

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X_{i1}) - \mathbb{E}(X_{i2}) = \mu_i - \mu_i = 0$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(Y_i) = \mathbb{V}\text{ar}(X_{i1}) + \mathbb{V}\text{ar}(X_{i2}) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2.$$

Dvs. vi kender den *sande* middelværdi af Y_i , $\mathbb{E}(Y_i) = \mu_Y = 0$. Derfor er

$$\hat{s}_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_Y)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{i1} - x_{i2})^2$$

et centralt estimat af $2\sigma^2$, hvorved $\hat{s}_Y^2/2$ er et estimat for σ^2 (variansen på den enkelte måling).

Opgave fra lektion 4

strækning	ℓ_i (m)	X_{i1} frem (mm)	X_{i2} tilbage (mm)
1	861	-91	89
2	624	219	-217
3	986	459	-475
4	595	353	-359
5	110	-130	132
6	1033	132	-137
7	952	636	-645
8	675	-638	637

- Lad X_{i1} og X_{i2} være to uafhængige stokastiske variable, der repræsenterer måling af højdeforskel ved hhv. frem- og tilbagesigte over en strækning ℓ_i . Der gælder $\mathbb{E}[X_{i1}] = \mu_i$, $\mathbb{E}[X_{i2}] = -\mu_i$ og $\mathcal{V}[X_{i1}] = \mathcal{V}[X_{i2}] = \sigma_k^2 \ell_i$, hvor σ_k er kilometerspredningen. Vis at middelværdi og varians for $Y_i = (X_{i1} + X_{i2})/\sqrt{2\ell_i}$ er hhv. 0 og σ_k^2 .
- Beregn på baggrund af $Y_1, \dots, Y_8$ et estimat s_k^2 for kilometervariansen σ_k^2 . (Hint: Y_i har kendt middelværdi 0).