
Opgaver til lektion 1

Opgave 1

Betragt følgende funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{når } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{når } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1. Skitser funktionen $f(x)$.
2. Opfylder $f(x)$ kravene til en tæthedsfunktion?
3. Antag X er en stokastisk variabel med ovenstående tæthedsfunktion. Find sandsynligheden $P(X \leq 1)$.
4. Skitser fordelingsfunktionen $F(x)$.

Opgave 2

En stokastisk variabel siges at være *ligefordelt* på intervallet a til b ($a < b$), hvis den har tæthedsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{når } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1. Skitser funktionen $f(x)$.
2. Opfylder $f(x)$ kravene til en tæthedsfunktion?

Opgave 3

Jf. opgave 2 er en stokastisk variabel ligefordelt på intervallet a til b ($a < b$), hvis den har tæthedsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{når } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1. Antag X er ligefordelt på intervallet fra a til b . Vis at $\mathbb{E}[X] = (a + b)/2$.
2. Vis at $\text{Var}[X] = (b - a)^2/12$.

Vink: $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$ og $b^3 - a^3 = (b - a)[(a + b)^2 - ab]$

Opgave 4

Antag X er en stokastisk variabel med $\mathbb{E}[X] = 2,8$ og varians $\text{Var}[X] = 0,7$. Lad $Y = 7 + 2,1X$. Bestem middelværdi og varians for Y .

Opgave 5

En bilsælger er provisionslønnet. Lad X være det (tilfældige) antal biler sælgeren sælger på en dag. Sælgerens dagsløn er 750kr plus 200kr for hver solgt bil. Middelværdi og standardafvigelse for antal solgte biler er hhv. 4,2 og 1,4. Find middelværdi, varians og standardafvigelse for sælgerens dagsløn.

Opgave 6

Antag at X er standard normalfordelt, dvs. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Bestem følgende sandsynligheder

1. $P(X \leq 0,6)$
2. $P(X \geq -1,5)$
3. $P(-1 \leq X \leq 2)$

Opgave 7

1. Antag $X \sim \mathcal{N}(4,9)$. Bestemt sandsynligheden $P(X \leq 6,4)$.
2. Antag $X \sim \mathcal{N}(5,16)$. Bestemt sandsynligheden $P(X \geq 0,2)$.
3. Antag $X \sim \mathcal{N}(3,4)$. Bestemt sandsynligheden $P(1 \leq X \leq 7)$.

Opgave 8

Antag at højden blandt værnepligtige mænd kan betragtes som værende normalfordelt med middelværdi 173,3 cm og varians $6,4^2 \text{cm}^2$. Antag vi har en stikprøve på 1000 værnepligtige mænd. Af disse 1000, hvor mange vil vi (ca.) forvente er...

1. ...over 170cm højde?
2. ...over 180cm højde?
3. ...over 190cm højde?
4. ...over 200cm højde?

Opgave 9

Antag at X er standard normalfordelt, dvs. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1. Bestem x , så $P(X \leq x) = 0,64$
2. Bestem x , så $P(X \leq x) = 0,36$
3. Bestem x , så $P(X \geq x) = 0,22$
4. Bestem x , så $P(0,2 \leq X \leq x) = 0,25$

Opgave 10

Antag $X \sim \mathcal{N}(4,9)$.

1. Find x , så $P(X \leq x) = 0,64$.
2. Find et interval symmetrisk omkring middelværdien, som indeholder X med 75% sandsynlighed.