
Opgaver til lektion 4

Opgave 1

Lad X og Y være uafhængige stokastiske variable med middelværdier 2,-2 og varianser 2,4.

Hvad er middelværdi, varians og spredning af $-2X + 4Y$?

Opgave 2

Antag X er en normalfordelt stokastisk variabel der repræsenterer måling af en vinkel målt i gon. Antag $X \sim \mathcal{N}(40, 0.01)$ og antag $Y = \tan(X)$.

1. Lineariser funktionen $\tan(x)$ omkring værdien $x = 40$.
2. Find tilnærmede udtryk for middelværdi og varians for Y .

Opgave 3

Antag $x_1 = 10$ og $x_2 = 14$ er observationer af uafhængige stokastiske variable X_1 og X_2 med fælles middelværdi μ og $\text{Var}X_1 = \sigma_1^2 = 4$ og $\text{Var}X_2 = \sigma_2^2 = 8$. Hvilket estimat vil du angive for μ ? Hvad er variansen på estimatet ?

Opgave 4

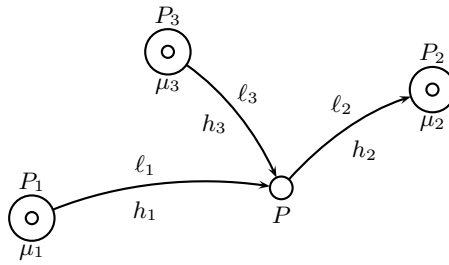
Der foretages frem- og tilbage-nivellering på 8 strækninger med følgende resultat. Dvs. målinger af den samme højdeforskel foretages to gange - ét fremsigte og ét tilbagesigte. Der er altså tale om dobbeltmålinger af samme størrelse.

strækning	vejlængde (m)	højdeforskel frem (mm)	højdeforskel tilbage (mm)
1	861	-91	89
2	624	219	-217
3	986	459	-475
4	595	353	-359
5	110	-130	132
6	1033	132	-137
7	952	636	-645
8	675	-638	637

- a) Lad X_{i1} og X_{i2} være to uafhængige stokastiske variable, der repræsenterer måling af højdeforskel ved hhv. frem- og tilbagesigte over en strækning ℓ_i . Der gælder $\mathbb{E}[X_{i1}] = \mu_i$, $\mathbb{E}[X_{i2}] = -\mu_i$ og $\text{Var}[X_{i1}] = \text{Var}[X_{i2}] = \sigma_k^2 \ell_i$, hvor σ_k er kilometerspredningen. Vis at middelværdi og varians for $Y_i = (X_{i1} + X_{i2})/\sqrt{2\ell_i}$ er hhv. 0 og σ_k^2 .
- b) Beregn et estimat s_k for kilometerspredningen. (Hint: I middel er Y_i^2 lig med σ_k^2).
- c) Estimer den totale højdeforskel på baggrund af frem- og tilbage-nivelleringerne. Angiv et konfidensinterval for højdeforskellen.

Opgave 5

- Betragt punkterne P_1 , P_2 og P i Figur 1. Punkterne P_1 og P_2 har kendte koter, hhv. $\mu_1 = 7845\text{mm}$ og $\mu_2 = 8157\text{mm}$. Fra punktet P_1 til punktet P er den målte afstand $\ell_1 = 861\text{m}$ og den målte højdeforskel $h_1 = 92\text{mm}$. Fra punktet P til punktet P_2 er den målte afstand $\ell_2 = 624\text{m}$ og den målte højdeforskel $h_2 = 217\text{mm}$. Lad μ_p betegne den



Figur 1: Illustration hørende til opgave 5.

ukendte kote i punktet P .

- a) Kote μ_P for punktet P kan estimeres ved et vægtet gennemsnit af $\mu_1 + h_1$ og $\mu_2 - h_2$. Bestem estimatet for μ_P .
- b) Bestem slutfejlen for strækningen fra P_1 til P_2 og fordel den på h_1 og h_2 .
- c) Bestem variansen for estimatet for μ_P idet kilometerspredningen $\sigma_k = 2\text{mm}/\sqrt{\text{km}}$.
- Punktet P_3 i figur 1 har den kendte kote $\mu_3 = 7597\text{mm}$. Fra punktet P_3 til punktet P er den målte afstand $\ell_3 = 763\text{m}$ og den målte højdeforskel $h_3 = 342\text{mm}$.
- d) Kote for punktet P kan estimeres ved et vægtet gennemsnit af $\mu_1 + h_1$, $\mu_2 - h_2$ og $\mu_3 + h_3$. Bestem et (nyt) estimat af μ_P .