Eksamen i Matematik, Modul 7, Efterår 2010

Mandag 25. oktober 2010

Tilladte hjælpemidler: bøger, noter og lommeregner. Computer er ikke tilladt. Ved bedømmelsen vil der blive lagt vægt på såvel korrekt metode som korrekt svar. Derfor skal den anvendte metode fremgå klart af besvarelsen.

Opgave 1 (34%)

Et lineært ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 9 &= -3x_3 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 &= -11 \end{aligned}$$

a. Angiv en matrix A og vektorer x og d, så det ovenstående ligningssystem kan opskrives på formen $Ax = d$.

b. Vis, at matricen A har invers matrix A^{-1} givet ved

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 8/3 & 2 \\ -1/3 & 4/3 & 1 \\ 1/3 & 5/3 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Løs ligningssystemet $Ax = d$ ved hjælp af enten række-operationer eller den ovenfor angivne inverse matrix til A.

Opgave 2 (22%)

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-4x-4} - y^2 - 16 + 8y$$

a. Find det stationære punkt for f (dvs. punktet, hvor alle partielle afledede er nul).

b. Afgør om det stationære punkt er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller ingen af delene.

Opgave 3 (22%)

Lad

$$z = 2x^2 + 3xy \quad \text{og} \quad y = \mathrm{e}^x$$

a. Beregn $\frac{dz}{dx}$ vha. metoden for 'totale afledte' (kæderegel udvidet til funktioner af flere variable).

b. Check resultatet fra forrige opgave ved at differentiere det udtryk for z som fremkommer, når e^x indsættes for y.

Opgave 4 (22%)

Lad

$$F(x, y) = 2x^2 + 3xy$$

og lad y være implicit defineret som en funktion af x ud fra ligningen

$$F(x, y) = 0$$

a. Bestem y når $x = 1$.

b. Beregn $\frac{dy}{dx}$ når $x = 1$.