

Nødvendige og tilstrækkelige betingelser for lokalt minimum eller maximum

Funktion $z = f(x, y)$.

Nødvendigt for (x_0, y_0) lokalt minimums eller maximumspunkt:

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \quad (*)$$

Tilstrækkelig betingelse for lokalt maximum:

$$(*) \text{ og } f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ og } f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) > f_{xy}(x_0, y_0)^2$$

Tilstrækkelig betingelse for lokalt minimum:

$$(*) \text{ og } f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ og } f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) > f_{xy}(x_0, y_0)^2$$

Hessian matrix:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

NB:

$$f_{xx} < 0 \text{ og } f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2 \Leftrightarrow f_{xx} < 0 \text{ og } |H| > 0 \Leftrightarrow H \text{ negativ definit}$$

Konkav og konveks funktion

$f(x, y)$ konkav (konveks) hvis graf for f under (over) tangentplan.

konkav $\Leftrightarrow H$ negativ semi-definit for alle $x, y \Leftrightarrow$

$$f_{xx} \leq 0 \text{ og } f_{yy} \leq 0 \text{ og } f_{xx}f_{yy} \geq f_{xy}^2$$

konveks $\Leftrightarrow H$ positiv semi-definit for alle $x, y \Leftrightarrow$

$$f_{xx} \geq 0 \text{ og } f_{yy} \geq 0 \text{ og } f_{xx}f_{yy} \geq f_{xy}^2$$

Tilstrækkelig betingelse for streng konkav:

$$H \text{ positiv definit for alle } x, y (\Leftrightarrow f_{xx} < 0, f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2)$$

Tilstrækkelig betingelse for streng konveks:

$$H \text{ negativ definit for alle } x, y (\Leftrightarrow f_{xx} > 0, f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2)$$

NB:

- ▶ hvis funktion konveks vil en lokal ekstremumsværdi være global minimumsværdi.
- ▶ hvis funktion konkav vil en lokal ekstremumsværdi være global maximumsværdi.

Strengt konkav/konveks \Rightarrow entydigt max/min. punkt (x_0, y_0) .

Homogene funktioner

$f(x_1, \dots, x_n)$ homogen af orden r hvis

$$f(jx_1, \dots, jx_n) = j^r f(x_1, \dots, x_n)$$

Eksempel: $g(x, y, w) = x^2/y + 2w^2/x$ er homogen af orden 1 (lineært homogen).

Eksempel (Cobb-Douglas) $f(K, L) = AK^\alpha L^\beta$.

$$f(jK, jL) = j^{\alpha+\beta} AK^\alpha L^\beta$$

Dvs. homogen af orden $\alpha + \beta$ (lineært homogen hvis $\alpha + \beta = 1$).