2. lektion – matriksregning

Markedsligevægtsmodel (se kapitel 3) med en vare:

Q_s, Q_d : mængder der udbydes / efterspørges

P : varens pris

$Q_s = Q_d$

$Q_s = a + bP$

$Q_d = C + dP$

Find løsning for ligevægtsværdier af $Q = Q_s = Q_d$ og P:

Ex

$Q_s = Q_d$

$Q_s = 1 + 2P$

$Q_d = 2 - 3P$

Sæt $Q_s = Q_d = Q$ i 2 nederste ligninger:

lige store koefficienter

$$\left.\begin{aligned} Q &= 1 + 2P \\ Q &= 2 - 3P \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} Q &= 1 + 2P \\ 0 &= 1 - 5P \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} Q &= 1\tfrac{2}{5} \\ P &= \tfrac{1}{5} \end{aligned}\right.$$

Markedsligevægt - 2 varer (f.eks BMW og Mercedes)

$$Q_{s_1} = Q_{d_1}$$

$$Q_{s_1} = a_1 + b_1 P_1 + c_1 P_2$$

$$Q_{d_1} = d_1 + e_1 P_1 + f_1 P_2$$

$$Q_{s_2} = Q_{d_2}$$

$$Q_{s_2} = a_2 + b_2 P_1 + c_2 P_2$$

$$Q_{d_2} = d_2 + e_2 P_1 + f_2 P_2$$

Kan i princippet løses som model med en vare - trinvis eliminering af variable vha lige store koefficienter.

Men notations og beregningsmæssigt tungt når mange variable.

Matricer og vektorer bekvemme redskaber til at håndtere store ligningssystemer.

Ligningssystem på matriks-vektor form

Ex

$$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7$$
$$x_1 + 8x_2 - x_3 = 10$$

har matrix-vektor form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{koefficient-matrix } A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\substack{x \\ \text{ubekendt} \\ \text{vektor}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}}_{d \text{ (højre side)}}$$

Dvs ligningssystemet kan kompakt skrives som $Ax = d$

(definerer matrix-vektor produkt lige straks)

Mere generelt (n ubekendte)

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= d_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= d_m \end{aligned}\right\} \text{m lig-ninger}$$

$\Leftrightarrow \quad Ax = d$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

(n søjler, m rækker)

Matriks-vektor produkt

A $m \times n$ matriks (m rækker, n søjler)

x $n \times 1$ matriks (n-dimensional søjlevektor)

Ax er $m \times 1$ matricen (m-dim søjle-vektor)

hvor i'te komponent er skalar (indre) produkt

$a_i \bullet x$ mellem i'te række a_i og x:

$$a_i \bullet x = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

? hvorfor skal A have n søjler ?

Ex Skalarprodukt

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad u \bullet v = -1 + 6 + 6 = 11$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad u \bullet v = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 3 v_3$$

$$= v_1 + 2 v_2 + 3 v_3$$

Ex

$$\underset{2 \times 3}{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}} \quad \underset{3 \times 1}{x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad Ax = \underset{2 \times 1}{\begin{bmatrix} 0 + 4 + 3 \\ 0 + 10 + 6 \end{bmatrix}} = \underset{2 \times 1}{\begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix}}$$

Matriksprodukt

$A: \quad m \times n \qquad B = [b^1 \cdots b^p] \quad n \times p$

med søjler $(n \times 1)$ $b^1 \cdots b^p$

$AB = [Ab^1 \cdots Ab^p]$ dvs $m \times p$ matrix

med søjler Ab^i = matriks-vektor produkt

mellem A og b^i. NB: antal søjler i A =

antal rækker i B !!

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times 3}{A}\ \underset{3\times 2}{B} = \left[A\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 16 & 15 \end{bmatrix}$$

$\checkmark$

Ex $\quad u = [1 \ 2 \ 3] \qquad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$uv =$

$vu =$

Der gælder i almindelighed <u>ikke</u> $AB = BA$!

<u>Ex</u>

$A : 2 \times 3$ $\quad$ $B : 3 \times 4$

$$\underset{2\times 3}{A}\ \underset{3\times 4}{B}$$

$\checkmark$

$$\underset{\underbrace{3\times 4 \quad 2\times 3}}{B \quad A}$$

$\div$ kan ikke beregnes

Selv hvis dimensionerne passer vil vi ofte have $AB \neq BA$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad !$$

<u>Ex</u>

Vend tilbage til markedsligevægt – 2 varer

og specifikke koefficienter

Matrix addition

$A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ (begge $m \times n$)

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$

Multiplikation med skalar

$c[a_{ij}] = [c\, a_{ij}]$

Ex

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Ex

$$Ax = a^1 x_1 + \cdots + a^n x_n \qquad (A = [a^1 \cdots a^n] \; m \times n)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad 2 \times 3$$

$$Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 + 0 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_3 \\ 4x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Regneregler for matriksregning

$A + B = B + A$ $\qquad$ $A + (B + C) = (A + B) + C$

$[AB \neq BA$ i alm!$]$ $\qquad$ $A(BC) = (AB)C$

$A(B + C) = AB + AC$

(Dvs på nær $AB \neq BA$ i alm samme regler som for regning med almindelige tal !)

NB division A/B ikke veldefineret !

(benytter i stedet invers matrix – senere)

Transponering af matriks

$A = [a_{ij}]$ $\qquad$ $A^T = [b_{ij}]$ hvor $b_{ij} = a_{ji}$

– dvs "række bliver til søjler" – og omvendt

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Ex

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$u^T v =$

$u v^T =$

Regneregler

$(A^T)^T = A \qquad (A+B)^T = A^T + B^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

? hvorfor ikke $(AB)^T = B^T A^T$

Identitetsmatricen

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$ $n \times n$ med 1 på diagonalen og 0 i alle andre indgange.

(normalt er n bestemt af konteksten og vi skriver da bare I)

I: matrix "et-tal" da

$AI = IA = A$:

$$AI = \left[A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} a^1 & a^2 \cdots & a^n \end{bmatrix}$$

$$= A$$

$$IA = \left[\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} a^1 \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} a^n \right]$$

$$= \begin{bmatrix} a^1 & \cdots & a^n \end{bmatrix} = A.$$

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad (I = I_3)$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad (I = I_2)$$

Invers matrix

A: $n \times n$ (kvadratisk)

C invers til A hvis $CA = AC = I$

C benævnes da A^{-1}

NB invers A^{-1} findes ikke altid.

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Da er $CA = 0$ for alle C!

Ex find invers til $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (hvis A^{-1} eksisterer)

$A^{-1} = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix}$ skal opfylde

$$A A^{-1} = I \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dvs 2 ligningssystemer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{11} \\ a^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{12} \\ a^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Løsning $\begin{bmatrix} a^{11} \\ a^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a^{12} \\ a^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Check $A^{-1}A = I$:

$$\begin{bmatrix} -2 & +\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & -6+6 \\ 1-1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Regneregle

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (AB)^{-1} = \underbrace{B^{-1}A^{-1}}_{\text{NB rækkefølge omvendt!}}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Invers matrix og lineært ligningssystem

$Ax = d$ hvor A $n \times n$ har invers A^{-1}

(? dim x og d)

$$Ax = d \iff A^{-1}Ax = A^{-1}d \iff Ix = A^{-1}d$$
$$\iff x = A^{-1}d.$$

Matricer og division

A^{-1} opfylder $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ ligesom $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Vi kunne forsøge at definere
(analogi med alm. division)

$$\frac{A}{B} = C \iff A = B^{-1}C$$

eller $\frac{A}{B} = C \iff A = CB^{-1}$. Problem $B^{-1}C \neq CB^{-1}$ i alm.
Dvs. undlader at def. $\frac{A}{B}$