Lineære ligningssystemer

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_1 = d_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = d_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = d_m$$

← ligningssystem

$\Leftrightarrow$

$Ax = d$ (matrix-ligning) $\Leftrightarrow$

$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_n a^n = d$ (vektorligning)

Hvornår findes løsning $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ og hvornår er løsning entydigt bestemt?

$m > n$: flere ligninger end ubekendte $\Rightarrow$ ikke løsning for alle d

$m < n$: færre ligninger end ubekendte $\Rightarrow$ $\div$ entydig løsning

Kigger i første omgang på $m = n$

(antal ligninger = antal ubekendte)

Invers og entydig løsning (kvadratisk matrix $n \times n$)

Hvis A har invers A^{-1} findes entydig løsning for alle d:

$$Ax = d \iff x = A^{-1}d$$

Omvendt: hvis $Ax = d$ løsning for alle d så har A invers:

Løs

$$A A^{-1} = I \iff A \begin{bmatrix} a^{11} & \cdots & a^{1n} \\ a^{n1} & \cdots & a^{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$ søjle for søjle!

Eksistens af invers og lineær afhængighed

Hvis $Ax = 0$ har ikke-triviel løsning $x \neq 0$ (homogen ligning)

så siges søjlerne i A at være lineært afhængige.

antag $x_1 \neq 0$

$$Ax = 0 \iff x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_n a^n = 0 \iff$$

$$a^1 = \frac{1}{x_1}\left(-x_2 a^2 - x_3 a^3 - \cdots - x_n a^n\right) \iff$$

$$a^1 = -\frac{x_2}{x_1} a^2 - \frac{x_3}{x_1} a^3 - \cdots - \frac{x_n}{x_1} a^n$$

Dvs. a^1 linearkombination (vægtet sum) af de øvrige søjler $\iff$ søjler lineært afhængige.

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$Ax = 0$ har ikke-triviel løsning $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dvs. søjler lineært afhængige

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

sidste søjle = sum af de 2 første.

Dvs. søjler lineært afhængige.

Der gælder A invertibel (A^{-1} eksisterer) $\Rightarrow$

$Ax = 0$ kun triviel løsning (dvs. søjler <u>lin. uafhængige</u>):

$$Ax = 0 \iff A^{-1}Ax = 0 \iff x = 0 \quad !$$

Omvendt kan det vises, at søjler lineært uafhængige $\Rightarrow$ A invertibel (hvorved $Ax = d$ entydig løsning for alle d)

Fortolkning af lineær afhængighed

Lineær afhængighed betyder at en eller flere variable er "overflødige".

Eksempel: højre-side d opfattes som fkt af x:

$$d = Ax$$

hvor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Bemærk: sidste søjle sum af de 2 første

$$d = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{(x_1 + x_3)}_{z_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \underbrace{(x_2 + x_3)}_{z_2} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dvs. ethvert $d = Ax$ kan udtrykkes som

$$d = \tilde{A} z \quad \text{hvor}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad z_1 = (x_1 + x_3) \quad z_2 = (x_2 + x_3).$$

Dvs 2 variable z_1 og z_2 nok!

Lad $d = 1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\2\\6\end{bmatrix}$

Da ved vi $Ax = d$ har løsning $x = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

og $d = [1+2]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + [-1+2]\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}$

Men d også lig med $[1+4+2-4]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + [-1+4+2-4]\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}$

Dvs. $x = \begin{bmatrix}5\\3\\-2\end{bmatrix}$ er også en løsning.

Faktisk er $x = \begin{bmatrix}1+k\\-1+k\\2-k\end{bmatrix}$ løsning for alle k

Dvs <u>uendeligt mange</u> løsninger.

Omvendt: hvis f.eks. $d = \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$ kan vi ikke

finde x så $Ax = d$ eller, ækvivalent, z så

$\tilde{A}z = d$:

$$\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} z_1 + z_2\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2 &= z_1 + 2z_2 \\ 2 &= 2z_2 \\ z_1 &= -\tfrac{1}{3}z_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} z_1 &= 0 \\ z_1 &= -\tfrac{1}{3}z_2 \\ z_2 &= 1 \end{aligned} \quad ↯$$

Rang af matrix

Rang(A) = max antal lineært uafh. søjler (rækker) i A.

Opsummering

A invertibel $\iff$ $Ax = d$ entydig løsning for alle d $\iff$

$Ax = 0$ kun triv. løsning $\iff$ søjler lineært uafh.

A ikke invertibel $\iff$ $Ax = d$ ej løsning for alle d

eller løsning ikke entydig (uendeligt mange)

$\iff$ $Ax = 0$ ikke-triviel løsning

$\iff$ søjler lineært afhængige.

Løsning af ligningssystemer / udregning af invers via rækkeoperationer

Rækkeoperationer:

1) gang række med skalar
2) byt om på rækker
3) adder / subtraher en række til/fra en anden række.

Svarer til "tilladte" handlinger for ligningssystemer.

Ex

$$\begin{matrix} x_1 + 5x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{matrix} \overset{1)}{\iff} \begin{matrix} 2x_1 + 10x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{matrix} \overset{3)}{\iff} \begin{matrix} 0 + 9x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\overset{2)}{\iff} \begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 2 \\ 0 + 9x_2 = 0 \end{matrix} \overset{1)}{\iff} \begin{matrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}.$$

Mere effektiv måde (undlader x_1, x_2)

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 10 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \end{array}\right]$$

$A \qquad a$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \leftarrow \text{Echelonform.}$$

$$\begin{matrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$[A \mid d]$ kan altid vha. rækkeoperationer omformes til echelonform hvorefter løsning kan findes (hvis der er en løsning) vha tilbagesubstitution.

Ex

$$[A \mid d] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & 2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array}\right]$$

dvs løsning for alle c (d)

$$[A \mid a] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & 2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{array}\right]$$

kun løsning hvis $d \sim \cdots \sim c$ hvor $c_3 = 0$.

Dvs hvis echelonform for A ikke har nulrække så løsning for alle d.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x_1 \quad + x_3 &= 7 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \overset{\text{baglæns subst.}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= -3 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Rang A = # ikke nul række i echelonform for A

Beregning af invers (hvis den eksisterer)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

søjler d^1, d^2, d^3 i A^{-1} løse

$$A d^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A d^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A d^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid \underset{\substack{\uparrow \\ \text{højresider}}}{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

I stedet for rækkeoperationer kan det være praktisk med formel til at afgøre om løsning findes og entydig (dvs om A^{-1} eksisterer).

Da er determinant og Cramers regel relevante.

Determinant

Determinanten $|A|$ for en $n \times n$ matrix A er et reelt tal, der beregnes udfra indgangene i A.

NB: $|A|$ ikke numerisk værdi!

Udregning af $|A|$ (rekursiv)

$n=1$: $A = [a_{11}]$ $|A| = a_{11}$

$n=2$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$n>2$: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} |C_{1j}|$ $\overbrace{|C_{ij}|}^{\text{cofaktor}} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$

M_{ij} = undermatrix hvor i'te række og j'te søjle fjernet:

$$M_{ij}: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \\ a_{i1} & a_{ij} & & a_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{nj} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kan udvikle efter vilkårlig række/søjle – samme resultat.

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,|C_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,|C_{ij}|$$

udvikling efter j'te søjle — udvikling efter i'te række.

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Efter første række: $1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 0 - 0 + (-5) = -5.$$

Efter sidste søjle: $1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5.$

Nemmest at udvikle efter søjle/række med mange nuller!

NB: formel for $|A|$ ser "uskyldig" ud men beregningerne meget omfattende hvis stort n

Ex: $n=5$ først 5 det af 4×4

hver 4×4: 4 det af 3×3

hver 3×3: 3 det af 2×2 ....