Matrixregning – determinant etc. – illustreret ved opg 5.5.3 c)

Lignings-system:

$$\begin{aligned} 4x + 3y - 2z &= 1 \\ x + 2y \quad\quad &= 6 \\ 3x \quad\quad + z &= 4 \end{aligned}$$

Udvidet matrix bringes på trappeform vha rækkeoperationer

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 1 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & -2 & -23 \\ 0 & -6 & 1 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & -6 & 1 & -14 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & 0 & 1+\frac{12}{5} & -14+\frac{6\cdot 23}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & \frac{68}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(Trappe/echelon-form)

Dvs ligningssystem ækvivalent med

$$\begin{aligned} x + 2y \quad\quad &= 6 \\ y + \tfrac{2}{5}z &= \tfrac{23}{5} \\ z &= 4 \end{aligned}$$

Baglæns substitution giver

$$\begin{aligned} z &= 4 \\ y &= \tfrac{23}{5} - \tfrac{8}{5} = 3 \\ x &= 6 - 2\cdot 3 = 0 \end{aligned}$$

Udregning af determinant for koefficient-matrix A

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 3 = 17$$

(rækkeoperation)

dvs $|A| \neq 0 \Rightarrow$
- søjler i A lin. uafhængige
- entydig løsning $Ax = d$
- invers A^{-1} findes.

Udregning af invers vha determinant

$$C = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ -3 & 10 & 9 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C' = \frac{1}{17} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 10 & -2 \\ -6 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

Løsning vha Cramer:

$$y^* = \frac{1}{|A|} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \underset{\sim}{d} \end{array} = \frac{1}{17} \begin{vmatrix} 10 & 9 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{17} \, 1 \begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{17} (60 - 9) = \frac{1}{17} 51 = 3 \quad !$$

National income model (afsnit 7.5)

$$Y = C + I_0 + G_0 \qquad \Rightarrow \qquad Y - C = I_0 + G_0$$

$$C = \alpha + \beta(Y - T) \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta Y - C - \beta T = -\alpha$$

$$T = \gamma + \delta Y \qquad\qquad \delta Y - T = -\gamma$$

Y = national indkomst $\quad C$ = forbrug $\quad I_0$: investeringer

G_0: offentligt forbrug $\quad T$ = skatter

Antager Y, C og T er ukendte variable.

Ligningssystemet omskrives til matrix-vektor form:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \beta & -1 & -\beta \\ \delta & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ -\alpha \\ -\gamma \end{bmatrix}}_{d}$$

Løser for Y vha Cramer:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} -1 & -\beta \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} \beta & -\beta \\ \delta & -1 \end{vmatrix} = 1 + (-\beta + \beta\delta)$$

$$= 1 + \beta(\delta - 1)$$

NB: $\beta > 0$ og $0 < \delta < 1$ $\Rightarrow |A| > 0$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} I_0 + G_0 & -1 & 0 \\ -\alpha & -1 & -\beta \\ -\gamma & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_0 + G_0 & -1 & 0 \\ -\alpha - I_0 - G_0 & 0 & -\beta \\ \gamma & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{1+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -\alpha - I_0 - G_0 & -\beta \\ -\gamma & -1 \end{vmatrix} = \alpha + I_0 + G_0 - \beta\gamma$$

Da $$Y^* = \frac{\alpha + I_0 + G_0 - \beta\gamma}{1 + \beta(\delta - 1)}.$$

Funktioner af flere variable

Ex

$$Y = \frac{\alpha + I_0 + G_0 - \beta\gamma}{1 + \beta(\delta - 1)}$$ kan opfattes

som funktion af δ, G_0 og I_0:

$$y = f(\delta, G_0, I_0)$$

Ex

$$z = f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 8xy$$

En funktion f af n variable $x_1, \ldots, x_n$ knytter til hver vektor $(x_1, \ldots, x_n)$ præcist et tal $z = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Som for en funktion af en variabel er det ofte interessant at finde de $(x_1, \ldots, x_n)$ hvor $f(x_1, \ldots, x_n)$ har et maksimum eller minimum.

Ex

finde δ, G_0 og I_0 der gør

$y = f(\delta, I_0, G_0)$ maksimal.

Visualisering

Grafen for en funktion $z = f(x, y)$ danner en overflade i det tredimensionelle rum.

Kan visualiseres vha konturplot eller 3D-plot (kræver computer)

Kontorplot: tegn konturkurver $(x, y) : f(x,y) = k$ for forskellige værdier af k.

Ex

$$f(x,y) = 3x + 4y - 2y^2 - yx - 2x^2$$

Funktion undersøges nærmere ved at reducere til funktion af en variabel x eller y ved at holde den anden variabel (y eller x) fast.

F.eks. hold y fast $y = y_0$

$$g(x) = 3x - y_0 x - 2x^2 + 4y_0 - 2y_0^2$$
$$= -2x^2 + (3 - y_0)x + (4y_0 - 2y_0^2)$$

– dvs 2. gradspolynomium i x

Tilsvarende $x = x_0$ holdt fast:

$$h(y) = -2y^2 + (4 - x_0)y + [3x_0 - 2x_0^2]$$

For en given værdi $y = y_0$ kan vi finde x værdi der giver min / max ved at differentiere $g(x)$:

$$g'(x) = -4x + 3$$

Tilsvarende med h

$$h'(y) = -4y + 4$$

$g'(x)$ og $h'(y)$ er partielle afledede mht x og y!

Def

Lad $f(x_1, \ldots, x_n)$ være en funktion af n-variable $(x_1, \ldots, x_n)$. Den partielle afledede $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ (benævnes også f_{x_i}) fremkommer ved at differentiere f mht x_i hvor alle andre variable $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ betragtes som konstanter.

Ex

$$f(x,y,z) = e^z x + y^2 x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^z + y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x e^z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

Fortolkning af partielle afledede

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ angiver tangenthældningen for den funktion $g(x_i)$ som fremkommer fra $f(x_1 \dots x_n)$ når alle variable på nær x_i holdes fast.

Ex national income model

$$Y^* = \frac{\alpha + I_0 + G_0 - \beta\gamma}{1 + \beta(\delta - 1)}$$

Hvordan afhænger Y af investeringer I_0 ?

$$\frac{\partial Y^*}{\partial I_0} = \frac{1}{1+\beta(\delta-1)} > 0.$$

Dvs. øget I_0 giver øget Y^*

Afhængighed af trækprocent δ :

$$\frac{\partial Y^*}{\partial \delta} = (\alpha + I_0 + G_0 - \beta\gamma) \frac{-1}{(1+\beta(\delta-1))^2} \beta\delta$$

$$= \frac{-Y^* \beta \delta}{(1+\beta(\delta-1))}$$

Dvs Y^* aftagende funktion af δ !

Ex markedsmodel med en vare

$Q = a - bP$ (efterspørgsel) $\iff$ $Q + bP = a$

$Q = -c + dP$ (udbud) $\qquad Q - dP = -c$

Koefficientmatrix $A = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & -d \end{vmatrix}$ har $|A| = -d-b$
$= -(d+b)$

Dvs $|A| \neq 0$ hvis $b \neq -d$

Løser vha rækkeop:

$$\begin{bmatrix} 1 & b & a \\ 1 & -d & -c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & b & a \\ 0 & -d-b & -c-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 1 & \frac{a+c}{d+b} \end{bmatrix}$$

dvs $P^* = \dfrac{a+c}{d+b}$ $\qquad Q^* = a - bP = a - \dfrac{b(a+c)}{d+b}$

$$= \frac{ad + ab - ab - bc}{d+b}$$

$$= \frac{ad - bc}{b+d}.$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial a} = \frac{1}{d+b} > 0 \quad (\text{da } b \geq 0 \text{ og } d \geq 0)$$

Dvs øget skæring a giver større ligevægtspris

$$\frac{\partial P^*}{\partial b} = (a+c)\frac{-1}{(d+b)^2} = -P^* \frac{1}{d+b} < 0$$

Dvs øget efterspørgsels hældning b giver lavere ligevægtspris
(efterspørgsel aftager hurtigere som fkt af P)

Grafisk