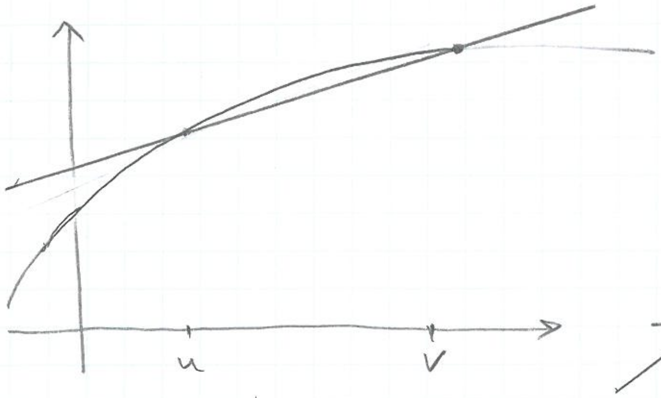
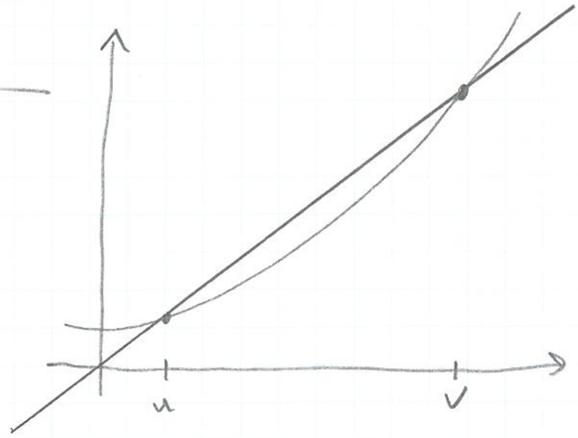
Konkave og konvekse funktioner



konkav



konveks

konkav $\Leftrightarrow$ graf <u>over</u> sekant

konveks $\Leftrightarrow$ graf <u>under</u> sekant

Formelt:

$$x = u + (v-u)\theta \qquad \theta \in [0,1]$$

Dvs. x gennemløber værdierne fra u til v når θ går fra 0 til 1.

Konkav

$$f(x) \geq \underbrace{f(u) + \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x-u)}_{\text{ligning for sekant}} \Leftrightarrow$$

$$f(u+(v-u)\theta) \geq \frac{f(v)-f(u)}{v-u}\theta(v-u) + f(u) \Leftrightarrow$$

$$f(u(1-\theta)+v\theta) \geq \underbrace{\theta\big(f(v)-f(u)\big) + f(u)}_{\text{gennemløber værdier fra } f(u) \text{ til } f(v) \text{ på y-aksen}} \Leftrightarrow$$

$$f(u(1-\theta)+v\theta) \geq f(u)(1-\theta) + f(v)\theta .$$

Tilsvarende mht konveks :

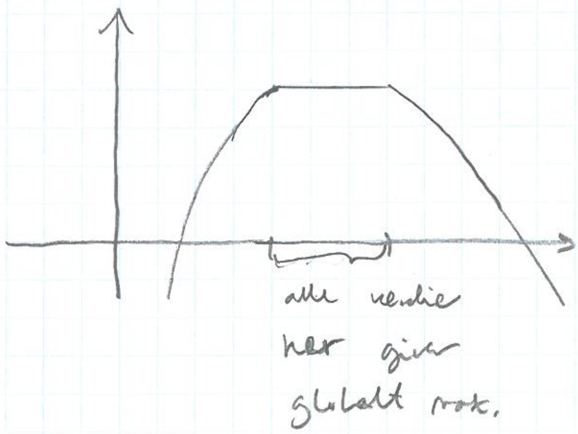
$$f(u(1-\theta)+v\theta) \le f(u)(1-\theta) + f(v)\theta$$

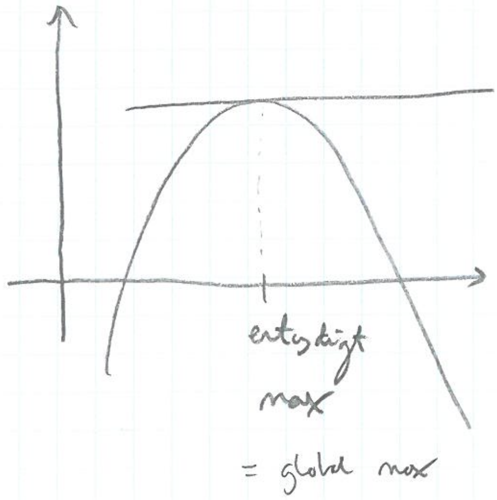
Optimering og konkavitet

Hvis en funksjon er konkav vil et lokalt max være globalt max

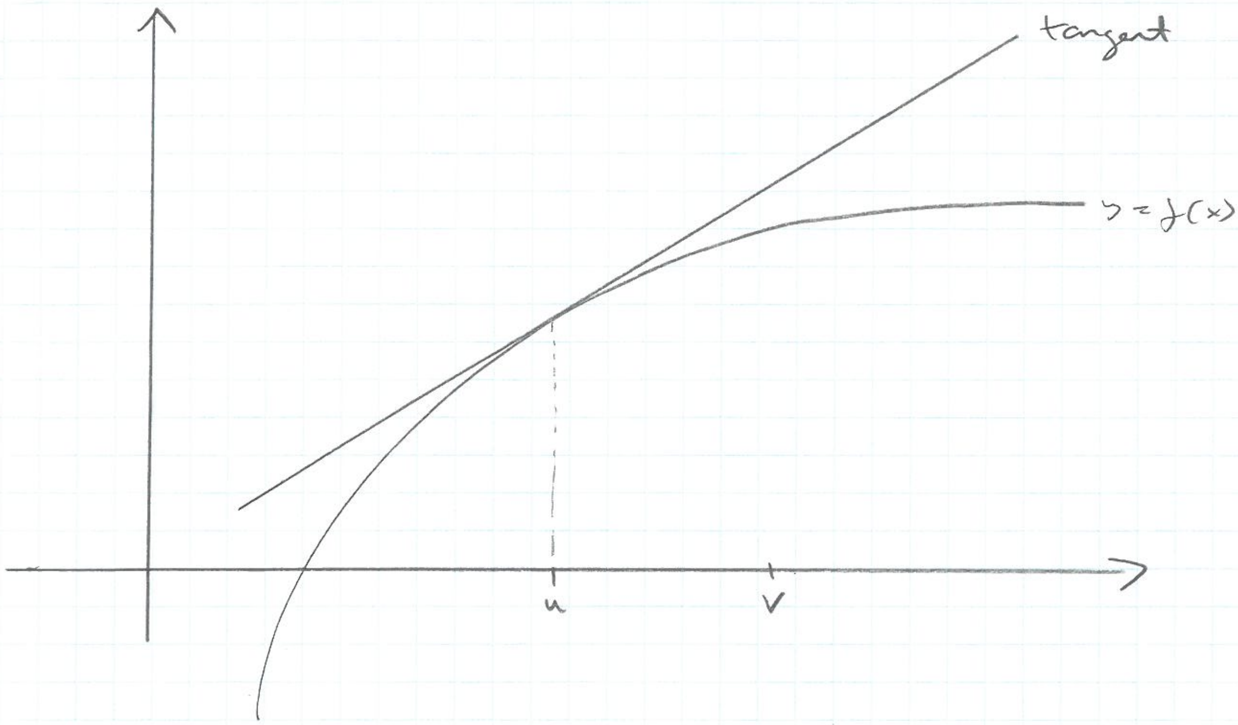
Hvis funksjon strengt konkav (>) vil et lokalt max være <u>entydigt</u> globalt max.

Konkav og streng konkav funksjon med lokal max = global max :





Formulering udfra tangent



Konkav hvis $f \leq$ tangent dvs

$$f(v) \leq f(u) + f'(u)(v-u)$$

Konveks hvis $f \geq$ tangent dvs

$$f(v) \geq f(u) + f'(u)(v-u) .$$

Formulering udfra 2. ordens afledet

$f''(x) \leq 0$ for alle x $\Leftrightarrow$ konkav ($f'(x)$ ikke-voksende)

$f''(x) \geq 0$ for alle x $\Leftrightarrow$ konveks ($f'(x)$ ikke-aftagende)

$f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x)$ ikke voksende

$f''(x) < 0 \Rightarrow$ strengt konkav

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ strengt konveks

NB: disse betingelser er tilstrekkelige ($\Rightarrow$) men ikke nødvendige ($\not\Leftarrow$). Ex $f(x) = x^4$ er strengt kon~~kav~~veks men $f''(0) = 0$.

(men da $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ ved vi konveks)

Funktioner af flere variable

$f(x,y)$ er konkav / konveks hvis alle

profil-funktioner (snit) er konkave / konvekse.

Udfra tangentplan

konkav hvis f under tangentplan

konveks hvis f over tangentplan

Udfra 2. ordens afledede

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

konkav $\Leftrightarrow$ H negativ semidefinit $\Leftrightarrow$

$$f_{xx} \leq 0 \wedge f_{yy} \leq 0 \quad \wedge \quad f_{xx} f_{yy} \geq f_{xy}^2$$

konveks $\Leftrightarrow$ H positiv semidefinit $\Leftrightarrow$

$$f_{xx} \geq 0 \wedge f_{yy} \geq 0 \quad \wedge \quad f_{xx} f_{yy} \geq f_{xy}^2$$

$$H \left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\} \text{definit} \begin{pmatrix} f_{xx} > 0, & f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2 \\ f_{xx} < 0 & f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{strengt konveks} \\ \text{strengt konkav} \end{matrix} \right\}$$

Ex

$f(x,y) = -x^2 - y^2$

$f_x = -2x \qquad f_{xx} = -2 < 0 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0$

$f_y = -2y \qquad f_{yy} = -2 < 0$

og $\quad f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2 \quad$ Dvs strengt konkav

Ex $\quad f(x,y) = -(x+y)^2$

$f_x = -2(x+y) \qquad f_{xx} = -2 \qquad f_{xy} = f_{yx} = -2$

$f_y = -2(x+y) \qquad f_{yy} = -2$

Dvs $\quad f_{xx} \leq 0 \quad f_{yy} < 0 \quad$ og $\quad f_{xy}^2 = f_{xx} f_{yy}$

dvs konkav (men kan ikke konkludere om strengt konkav)

Ex $\quad f(x,y) = -xy$

$f_x = -y \qquad f_{xx} = 0 \qquad f_{xy} = f_{yx} = -1$

$f_y = -x \qquad f_{yy} = 0$

dvs $\quad f_{xx} = 0 \quad f_{yy} = 0 \quad$ men ikke

$f_{xx} f_{yy} \geq f_{xy}^2 \quad (0 \not\geq 1)$. Dvs hverken konkav eller konveks.