Homogene funktioner

$f(x_1, \ldots, x_n)$ homogen af orden r hvis

$$f(jx_1, \ldots, jx_n) = j^r f(x_1, \ldots, x_n)$$

Ex $\quad g(x,y,w) = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{2w^2}{x}$

$$g(jx, jy, jw) = \frac{(jx)^2}{jy} + \frac{2(jw)^2}{jx}$$

$$= \frac{j^2x^2}{jy} + \frac{2j^2w^2}{jx} = j\,\frac{x^2}{y} + j\,\frac{2w^2}{x}$$

$$= j\,g(x,y,w)$$

Dvs homogen af orden 1.

Kaldes også lineært homogen (ikke lineær homogen)

Ex (produktionsfunktion)

$$\underset{\text{output}}{Q} = f(\underset{\text{kapital}}{K}, \underset{\text{arbejdskraft}}{L})$$

Q lineært homogen $\Rightarrow$ 1) middelfkt afhænger kun af $\frac{K}{L}$

2) marginale fkt —— " ——

Middelfkt mht L:

$$\underbrace{\frac{Q}{L} = \frac{1}{L}}_{\text{"r"}} f(K,L) = f\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = \underbrace{f(\underbrace{\tfrac{K}{L}}_{k}, 1)}_{\varphi(k)} = \varphi(k) \qquad k = \frac{K}{L}$$

Tilsvarende mht $\frac{Q}{K}$!

Marginalfkt mht L:

$$Q = L\,\varphi(k) \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} = 1 \cdot \varphi(k) + L\,\varphi'(k)\frac{dk}{dL}$$

$$= \varphi(k) + L\,\varphi'(k)\frac{-K}{L^2}$$

$$= \varphi(k) - \varphi'(k)\,k.$$

<u>Ex</u> Cobb-Douglas

$$f(K,L) = A\,K^{\alpha}L^{\beta}$$

$$f(rK, rL) = A\,(rK)^{\alpha}(rL)^{\beta} = A\,r^{\alpha}K^{\alpha}r^{\beta}L^{\beta}$$

$$= r^{\alpha+\beta}AK^{\alpha}L^{\beta}.$$

Dvs homogen af orden $\alpha + \beta$

Lineart homogen hvis $\alpha + \beta = 1$.

Maksimering under sidebetingelser givet ved uligheder

Maksimering af $f(x,y)$ uden sidebetingelser (dvs alle værdier (x,y) mulige):

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ nødvendig betingelse dvs

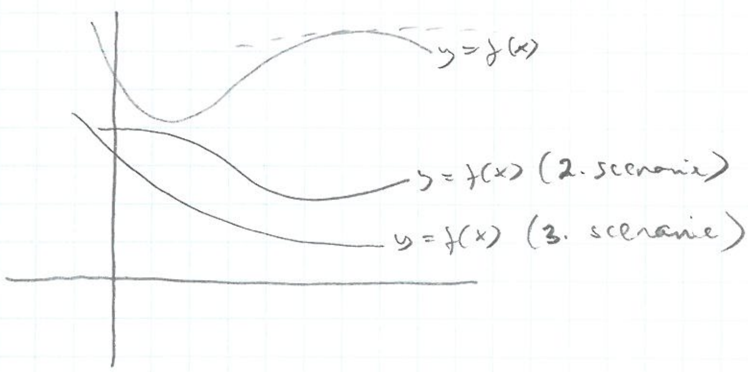
max (eller min) $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Dvs. finder vi alle (x,y) hvor $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ er vi sikre på at finde alle max (men kan også være min eller saddelpunkt).

Hvad hvis vi kræver løsning ikke-negativ?

Ex

find max for $y = f(x)$ hvor $x \geq 0$



Muligheder $\frac{df}{dx} = 0 \wedge x > 0$ eller

$\frac{df}{dx} = 0 \wedge x = 0$

$\frac{df}{dx} < 0 \wedge x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{df}{dx} \leq 0 \wedge x \geq 0 \wedge \underbrace{x \frac{df}{dx} = 0}_{\text{komplementær "slaphed"}}$

Maksimere $f(x_1, \ldots, x_n)$ under ikke-negativitet

$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n$:

Benytter forgående betingelse på hvert x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \leq 0 \quad \wedge \quad x_i \geq 0 \quad \wedge \quad x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Yderligere sidebetingelser

Ex maximere $f(x_1, x_2, x_3)$ under

a) $g^1(x_1, x_2, x_3) \leq r_1$

b) $g^2(x_1, x_2, x_3) \leq r_2$

c) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Dette er ækvivalent med at maximere f under

a') $g^1(x_1, x_2, x_3) + s_1 = r_1$

b') $g^2(x_1, x_2, x_3) + s_2 = r_2$

c') $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$.

Ignorerer vi et øjeblik c') kan vi

lmge Lagrange på vanlig vis:

Sæt $Z^{1} = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1(r_1 - g^1(x_1, x_2, x_3) - s_1)$

(NB: ikke afledet) $+ \lambda_2(r_2 - g^2(x_1, x_2, x_3) - s_2)$

og skal løse

$$\frac{\partial Z'}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1,2,3 \qquad \frac{\partial Z'}{\partial s_i} = 0 \quad i = 1,2$$

$$\frac{\partial Z'}{\partial \lambda_i} = 0 \quad i = 1,2$$

Men indføres ikke-negativitet $x_j \geq 0$ og $s_i \geq 0$

skal ligninger erstattes med

$$\frac{\partial Z'}{\partial x_j} \leq 0 \quad \wedge \ x_j \geq 0 \quad \wedge \ x_j \frac{\partial Z'}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial Z'}{\partial s_i} \leq 0 \quad \wedge \ s_i \geq 0 \quad \wedge \ s_i \frac{\partial Z'}{\partial s_i} = 0$$

$$\frac{\partial Z'}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad \left(\Leftrightarrow \ s_i = r_i - g^i(x_1, x_2, x_3)\right)$$

Da $\frac{\partial Z'}{\partial s_i} = -\lambda_i$ og $s_i = r_i - g^i(x_1, x_2, x_3)$

følger at

Kuhn-Tucker betingelserne.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial Z'}{\partial x_j} \leq 0 \quad \wedge \ x_j \geq 0 \quad \wedge \ x_j \frac{\partial Z'}{\partial x_j} = 0 \\ \lambda_i \geq 0 \quad \wedge \ r_i - g^i(x_1, x_2, x_3) \geq 0 \quad \wedge \ \lambda_i(r_i - g^i(x_1, x_2, x_3)) = 0 \end{array}\right.$$

KT kan også udtrykkes via

$$Z(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 [r_1 - g(x_1, x_2, x_3)] + \lambda_2 (r_2 - g(x_1, x_2, x_3))$$

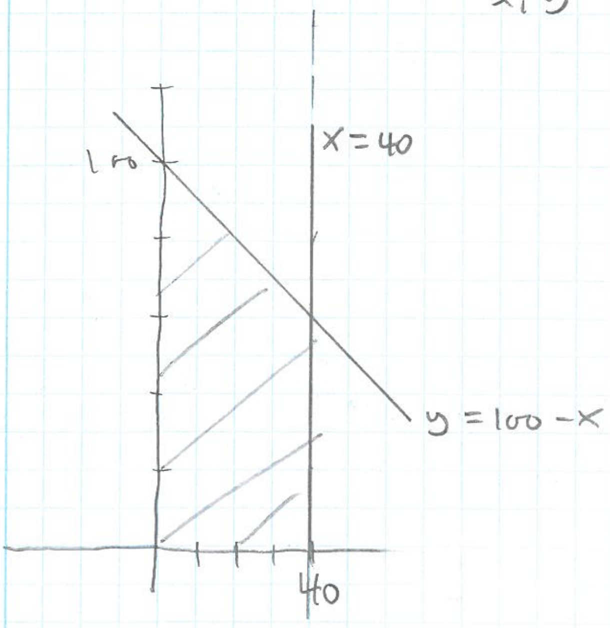
KT: $\frac{\partial Z}{\partial x_j} \leq 0 \quad \wedge \; x_j \geq 0 \quad \wedge \; x_j \frac{\partial Z}{\partial x_j} = 0$

$\frac{\partial Z}{\partial \lambda_i} \geq 0 \quad \wedge \; \lambda_i \geq 0 \quad \wedge \; \lambda_i \frac{\partial Z}{\partial \lambda_i} = 0$.

Eksempel

Maksimer $U = xy$ under

betingelser
$$x + y \leq 100$$
$$x \leq 40$$
$$x, y \geq 0$$



$$Z(x, y) = xy + \lambda_1 (100 - x - y) + \lambda_2 (40 - x)$$

KT:

$y - \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0, \; x \geq 0, \; x(y - \lambda_1 - \lambda_2) = 0$

$x - \lambda_1 \geq 0, \; y \geq 0, \; y(x - \lambda_1) = 0$

$100 - x - y \geq 0, \; \lambda_1 \geq 0, \; \lambda_1(100 - x - y) = 0$

$40 - x \geq 0, \; \lambda_2 \geq 0, \; \lambda_2(40 - x) = 0$

Prøver seg frem:

a) $x = 0 \lor y = 0 \Rightarrow U = 0$ %

Dvs $x > 0$ og $y > 0$.

Da vet vi $y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ og $x - \lambda_1 = 0$

$\Leftrightarrow y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ og $x = \lambda_1$.

Dvs vi vet $\lambda_1 > 0$ og dermed $100 - x - y = 0$

Dvs $x + y = 100$

Antar $\lambda_2 = 0$. Dermed $y - x = 0 \Leftrightarrow y = x$

$\Rightarrow y = x = 50$ %

Da $x \leq 40$.

Dvs $\lambda_2 > 0 \Rightarrow x = 40$.

Dvs KT oppfylt når $x = 40$ og $y = 60$

KT ikke altid nødvendige. Dvs der gælder ikke altid max $\Rightarrow$ KT $\left(\Leftrightarrow \neg KT \Rightarrow \neg \max \right)$

Dvs. det er ikke altid at vi finder alle max punkter vha KT.

Dog er KT altid nødvendige hvis lineære sidebetingelser: